

SEGUNDO PARCIAL - 05/08/2020
RESOLUCIÓN

1. Considerar el problema:

$$u_t(x, t) + (f(u(x, t)))_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

donde las funciones f y g están dadas por:

$$f(x) := \frac{x(2-x)}{2} \quad \text{y} \quad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 + \frac{x}{2} & \text{si } 0 < x < 2, \\ 2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Verificar que las curvas características no se intersecan en $\mathbb{R} \times (0, 2)$ y usar el método de las características para determinar una solución clásica. Explicitar el dominio de definición de dicha solución.

(b) Determinar una solución débil de (1)-(2).

Resolución.

(a) Supongamos que u es solución de (1)-(2) y sea $(x(t), t)$ la curva característica que contiene a $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ dado. Como $x'(t) = f'(u(x(t), t))$ se tiene:

$$\frac{d}{dt}(u(x(t), t)) = u_t(x(t), t) + x'(t)u_x(x(t), t) = 0,$$

así que u es constante sobre $(x(t), t)$. Luego,

$$x'(t) = f'(u(x(t), t)) = f'(u(x, 0)) = f'(g(x)),$$

de donde se obtiene que $x(t) = f'(g(x))t + x$. Usando que $f'(x) = 1 - x$, resulta:

$$x(t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0, \\ -\frac{x}{2}t + x & \text{si } 0 < x < 2, \\ -t + x & \text{si } x \geq 2. \end{cases} \quad (3)$$

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, y sea γ_i la curva característica que contiene a $(x_i, 0)$, $i = 1, 2$. Usando (3), obtenemos lo siguiente:

- Si $x_1, x_2 \leq 0$ o $x_1, x_2 \geq 2$, γ_1 y γ_2 no se intersecan.
- Si $0 < x_1, x_2 < 2$, γ_1 y γ_2 se intersecan en $(0, 2)$.
- Si $x_1 \leq 0$ y $x_2 \geq 2$, γ_1 y γ_2 se intersecan en $(x_1(t_*), t_*)$ con $t_* = x_2 - x_1 \geq 2$.
- Si $x_1 \leq 0 < x_2 < 2$, γ_1 y γ_2 se intersecan en $(x_1(t_*), t_*)$ con $t_* = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2} \geq 2$.
- Si $0 < x_1 < 2 \leq x_2$, γ_1 y γ_2 se intersecan en $(x_1(t_*), t_*)$ con $t_* = \frac{2(x_2 - x_1)}{2 - x_1} \geq 2$.

Por lo tanto, las curvas características no se intersecan en $\mathbb{R} \times (0, 2)$, ver Figura 1.

Sea $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times (0, 2)$. Usando nuevamente (3) podemos calcular el valor de x tal que corresponde a la curva que contiene a $(\bar{x}, \bar{t})$:

$$x = \begin{cases} \bar{x} & \text{si } \bar{x} \leq 0, \\ \frac{2\bar{x}}{2-\bar{t}} & \text{si } 0 < \bar{x} < 2 - \bar{t}, \\ \bar{x} + \bar{t} & \text{si } \bar{x} \geq 2 - \bar{t}. \end{cases}$$

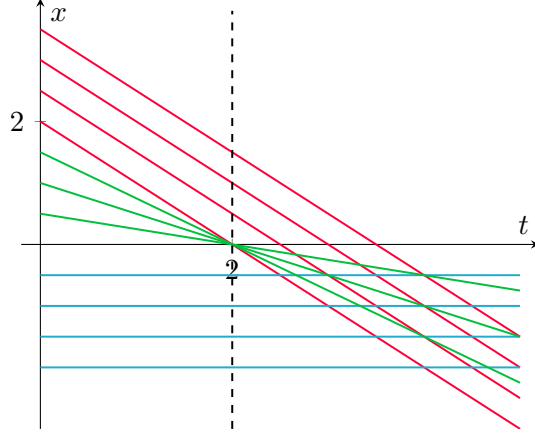


Figura 1: Curvas características para (1)-(2)

Entonces, debe ser:

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \leq 0, \\ 1 + \frac{\bar{x}}{2-\bar{t}} & \text{si } 0 < \bar{x} < 2 - \bar{t}, \\ 2 & \text{si } \bar{x} \geq 2 - \bar{t}, \end{cases} \quad 0 \leq \bar{t} < 2. \quad (4)$$

La función dada por (4) es continua en $\mathbb{R} \times (0, 2)$ y derivable con continuidad en $\mathbb{R} \times (0, 2) \setminus V$, siendo:

$$V := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : x = 2 - t \text{ o } x = 0\}.$$

Es inmediato que u satisface (2). Además, puesto que:

$$u_t(\bar{x}, \bar{t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{x} < 0 \text{ o } \bar{x} > 2 - \bar{t}, \\ \frac{\bar{x}}{(2-\bar{t})^2} & \text{si } 0 < \bar{x} < 2 - \bar{t}, \end{cases} \quad \text{y} \quad u_x(\bar{x}, \bar{t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{x} < 0 \text{ o } \bar{x} > 2 - \bar{t}, \\ \frac{1}{2-\bar{t}} & \text{si } 0 < \bar{x} < 2 - \bar{t}, \end{cases}$$

también se tiene que u satisface (1) en $\mathbb{R} \times (0, 2) \setminus V$.

Por lo tanto, la función u dada por (4) es una solución clásica de (1)-(2) en $\mathbb{R} \times [0, 2) \setminus V$.

(b) Buscamos una solución débil en $\mathbb{R} \times [2, +\infty)$ de la forma:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \gamma(t), \\ 2 & \text{si } x > \gamma(t), \end{cases} \quad t \geq 2,$$

donde γ es una función a determinar. Primero observamos que u es una solución clásica de (1) en los conjuntos ω^+ y ω^- , siendo:

$$\omega^+ := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : x > \gamma(t)\} \quad \text{y} \quad \omega^- := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : x < \gamma(t)\},$$

puesto que u es constante en dichos conjuntos. Para averiguar γ , haremos uso de la condición de Rankine-Hugoniot. Buscamos entonces una función γ de modo que:

$$[u](t)\gamma'(t) = [f(u)](t) \quad t > 0, \quad \gamma(2) = 0,$$

donde $[u] := u^+ - u^-$ y $[f(u)] := f(u^+) - f(u^-)$, siendo $u^\pm(t) := \lim_{\omega^\pm \ni (x,s) \rightarrow (\gamma(t), t)} u(x, s)$.

Notando que:

$$u^+(t) = 2, \quad u^-(t) = 1, \quad f(u^+(t)) = 0, \quad f(u^-(t)) = \frac{1}{2},$$

obtenemos que γ debe ser solución del siguiente problema:

$$\gamma'(t) = -\frac{1}{2}, \quad \gamma(2) = 0,$$

de donde se obtiene que $\gamma(t) = 1 - t/2$. Luego, la función u definida por

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 - t/2, \\ 2 & \text{si } x > 1 - t/2, \end{cases} \quad t > 2, \quad (5)$$

es una solución débil de (1)-(2) en $\mathbb{R} \times [2, \infty)$.

Además, vimos que la función u definida por (4) es solución clásica en $\mathbb{R} \times (0, 2) \setminus V$. Notar que u es continua en las rectas $x = 0$ y $x = 2 - t$ en $\{t < 2\}$, es decir $u^+ = u^-$ en cada punto de estos segmentos, por lo que $[u] = [f(u)] = 0$. En particular, la condición de Rankine-Hugoniot $[u](t)\gamma'(t) = [f(u)](t)$ está trivialmente verificada que sea con $\gamma(t) = 0$ (para $x = 0$) o $\gamma(t) = 2 - t$.

Luego, la función u definida por (4) en $\{t < 2\}$ y (5) en $\{t > 2\}$ es solución débil de (1)-(2).

2. Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ la solución del problema:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) &= 0 & x \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde $h \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$. Demostrar las siguientes estimaciones:

- (a) $|u(x, t)| \leq \frac{R^2}{t} \|h\|_\infty$ para todos $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$, siendo $R > 0$ tal que $\text{sop}(h) \subset B_R(0)$.
(b) $|u(x, t)| \leq \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla h(y)| dy$ para todos $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$.

Sugerencia: Escribir $h(x + t\nu) = - \int_t^\infty (h(x + \rho\nu))_\rho d\rho$.

Resolución.

- (a) Sea $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$. Usando la fórmula de Kirchhoff y que $\text{sop}(h) \subset B_R(0)$, escribimos:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_A h(y) dS_y, \quad A := \partial B_t(x) \cap B_R(0).$$

Si $A = \emptyset$ entonces la desigualdad que buscamos probar se verifica trivialmente. Si no, se tiene que A es un casquete esférico de radio $r \leq R$ y altura $h \leq R$. Entonces, $|A| = \pi(r^2 + h^2) \leq 4\pi R^2$. Combinando esto con que $h \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, obtenemos:

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{4\pi t} \|h\|_\infty |A| = \frac{R^2}{t} \|h\|_\infty.$$

- (b) Sea $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$. Usando nuevamente la fórmula de Kirchhoff, escribimos:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_t(x)} h(y) dS_y = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} h(x + t\nu) dS_\nu.$$

Para obtener la segunda integral hemos usado el cambio de variables $y = x + t\nu$.

Como h tiene soporte compacto, podemos escribir:

$$h(x + t\nu) = - \int_t^\infty (h(x + \rho\nu))_\rho d\rho = - \int_t^\infty \nabla h(x + \rho\nu) \cdot \nu d\rho.$$

Entonces

$$|u(x, t)| \leq \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} \int_t^\infty |\nabla h(x + \rho\nu)| d\rho dS_\nu = \frac{t}{4\pi} \int_t^\infty \left(\int_{\partial B_1(0)} |\nabla h(x + \rho\nu)| dS_\nu \right) d\rho.$$

Con el cambio de variables $y = x + \rho\nu$, la integral sobre $\partial B_1(0)$ es

$$\int_{\partial B_1(0)} |\nabla h(x + \rho\nu)| dS_\nu = \frac{1}{\rho^2} \int_{\partial B_\rho(x)} |\nabla h(y)| dS_y \leq \frac{1}{t^2} \int_{\partial B_\rho(x)} |\nabla h(y)| dS_y.$$

Luego,

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{4\pi t} \int_t^\infty \int_{\partial B_\rho(x)} |\nabla h(y)| dS d\rho = \frac{1}{4\pi t} \int_{\{|y-x| \geq t\}} |\nabla h(y)| dy \leq \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla h(y)| dy.$$

3. Demostrar que para $n \geq 3$ existe una constante positiva C que depende sólo de n tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)^2}{|x|^2} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx \quad \text{para toda } u \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Sugerencia: Calcular la divergencia del campo de vectores $F(x) := \frac{x}{|x|^2}$, $x \neq 0$.

Resolución. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n)$, existe una sucesión $\{u_k\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \rightarrow u$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Vamos a demostrar primero que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_k(x)^2}{|x|^2} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k(x)|^2 dx \quad \text{para todo } k, \quad (6)$$

siendo C una constante positiva que sólo depende de n . Luego pasaremos al límite para $k \rightarrow \infty$ para obtener la misma desigualdad para la función u .

Definimos la función auxiliar F por $F(x) := x/|x|^2$ para $x \neq 0$, y observamos que:

$$\operatorname{div}(F(x)) = \frac{n-2}{|x|^2} \quad \forall x \neq 0.$$

Fijamos un k y luego un $R > 0$ tal que $\operatorname{supp}(u_k) \subset B_R := B_R(0)$. Primero observamos que

$$(n-2) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_k(x)^2}{|x|^2} dx = \int_{B_R} u_k(x)^2 \operatorname{div}(F(x)) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} u_k(x)^2 \operatorname{div}(F(x)) dx, \quad (7)$$

donde $B_\varepsilon := B_\varepsilon(0)$ para $\varepsilon > 0$. La última igualdad en (7) se justifica por el teorema de la convergencia dominada, ya que:

$$\begin{aligned} u_k^2 \operatorname{div}(F) \mathbb{1}_{B_R \setminus B_\varepsilon} &\rightarrow u_k^2 \operatorname{div}(F) && \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^n, \\ |u_k^2 \operatorname{div}(F) \mathbb{1}_{B_R \setminus B_\varepsilon}| &\leq u_k^2 |\operatorname{div}(F)| \leq \frac{C}{|x|^2} \mathbb{1}_{B_R} && \text{p.c.t. } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

siendo C una constante positiva y $x \mapsto |x|^{-2} \mathbb{1}_{B_R}(x)$ integrable en $\mathbb{R}^n$. En efecto,

$$\int_{B_R} \frac{1}{|x|^2} dx = n \omega_n \int_0^R \frac{1}{r^{3-n}} dr < \infty,$$

ya que $n \geq 3$, siendo ω_n la medida de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Como F no está definida en $x = 0$, para trabajar sobre el lado izquierdo de (7) se hace necesario trabajar primero sobre las integrales en $B_R \setminus B_\varepsilon$, y luego pasar al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Integrando por partes, obtenemos:

$$\int_{B_R \setminus B_\varepsilon} u_k(x)^2 \operatorname{div}(F(x)) dx = \int_{\partial(B_R \setminus B_\varepsilon)} u_k(x)^2 F(x) \cdot \mathbf{n}(x) d\sigma - \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \nabla(u_k(x)^2) F(x) dx.$$

La integral sobre $\partial(B_R \setminus B_\varepsilon)$ se puede escribir como la suma de dos integrales, una sobre ∂B_R y otra sobre ∂B_ε . La primera es nula porque $u_k = 0$ sobre ∂B_R . La segunda, satisface la siguiente estimación:

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u_k(x)^2 F(x) \nu d\sigma \leq C \int_{\partial B_\varepsilon} |F(x)| d\sigma = C \frac{1}{\varepsilon} |\partial B_\varepsilon| = C \varepsilon^{n-2},$$

por lo que tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Volviendo a (7), obtenemos:

$$(n-2) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_k(x)^2}{|x|^2} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \nabla(u_k(x)^2) F(x) dx = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \left(\frac{x u_k}{|x|^2} \right) \cdot \nabla u_k dx.$$

Usando la desigualdad de Hölder, resulta:

$$\frac{n-2}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_k(x)^2}{|x|^2} dx \leq \|\nabla u_k\|_2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \frac{u_k(x)^2}{|x|^2} dx \right)^{1/2} = \|\nabla u_k\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_k(x)^2}{|x|^2} dx \right)^{1/2},$$

donde la última desigualdad se justifica por el teorema de la convergencia dominada en forma análoga a lo hecho antes. Por lo tanto, vale (6) con $C := 4/(n-2)^2$.

Ahora pasamos ahora al límite para $k \rightarrow +\infty$ en (6). Como $u_k \rightarrow u$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $u_k \rightarrow u$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}$ de $\{u_k\}$ que converge a u en casi todo punto. Usando el lema de Fatou la convergencia de ∇u_{k_j} a ∇u en $L^2(\mathbb{R}^n)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)^2}{|x|^2} dx &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_{k_j}(x)^2}{|x|^2} dx \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{4}{(n-2)^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_j}(x)|^2 dx \\ &= \frac{4}{(n-2)^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado, conexo con frontera ∂U de clase C^1 , y sean $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial U$ de medida positiva, disjuntos y tales que $\partial U = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Considerar el problema:

$$-\Delta u = f \quad \text{en } U, \quad u = 0 \quad \text{en } \Gamma_1, \quad \partial_{\mathbf{n}} u = g \quad \text{en } \Gamma_2, \quad (8)$$

donde $f \in L^2(U)$ y $g \in L^2(\partial U)$.

- (a) Probar que existe $C > 0$ tal que:

$$\int_U u^2 dx \leq C \int_U |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in H_{\Gamma_1}^1(U),$$

donde $H_{\Gamma_1}^1(U) := \{u \in H^1(U) : u = 0 \text{ en } \Gamma_1\}$.

- (b) Probar que $(u, v) := \int_U \nabla u \cdot \nabla v dx$ define un producto interno en $H_{\Gamma_1}^1(U)$ y que le da estructura de espacio de Hilbert.
(c) Dar una formulación débil para (8) y probar la existencia y unicidad de solución débil.

Resolución.

- (a) Veamos ahora que existe $C > 0$ tal que vale la siguiente desigualdad de Poincaré:

$$\int_U u^2 dx \leq C \int_U |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in H_{\Gamma_1}^1(U). \quad (9)$$

Supongamos, por el contrario, que (9) no vale para ninguna $C > 0$. Entonces existe una sucesión $\{u_k\} \subset H_{\Gamma_1}^1(U)$ tal que:

$$\int_U |\nabla u_k|^2 dx \leq \frac{1}{k} \int_U u_k^2 dx \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Luego, $\tilde{u}_k := u_k / \|u_k\|_2$ verifica $\|\tilde{u}_k\|_2 = 1$ y

$$\int_U |\nabla \tilde{u}_k|^2 dx \leq \frac{1}{k}. \quad (11)$$

En particular la sucesión $\{\tilde{u}_k\}$ está acotada en $H^1(U)$. Por el teorema de Rellich-Kondrachov sabemos que existe $\tilde{u} \in H^1(U)$ y una subsucesión de $\{\tilde{u}_k\}$, a la cual también denotamos por $\{\tilde{u}_k\}$, tal que:

- (i) $\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u}$ en $L^2(U)$,
(ii) $\|\nabla \tilde{u}\|_2 \leq \liminf \|\nabla \tilde{u}_k\|_2$.

De (11) y (ii) deducimos que $\nabla \tilde{u} = 0$, es decir, que $\tilde{u}$ es constante. Además,

$$\|\nabla(\tilde{u}_k - \tilde{u})\|_2 = \|\nabla \tilde{u}_k\|_2 \rightarrow 0.$$

Combinando esto con (i) deducimos que $\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u}$ en $H^1(U)$. Por la continuidad del operador de traza $T : H^1(U) \rightarrow L^2(\partial U)$, obtenemos que $\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u}$ en $L^2(\partial U)$. Luego existe una subsucesión de $\{\tilde{u}_k\}$ que converge en casi todo punto de ∂U a la función $\tilde{u}$. Como $\tilde{u}_k = 0$ sobre Γ_1 para todo k , se obtiene que $\tilde{u} = 0$ sobre Γ_1 , y como $\tilde{u}$ es constante, deducimos que $\tilde{u} = 0$.

Por otro lado, observamos que $\|\tilde{u}\|_2 = 1$ ya que $u_k \rightarrow \tilde{u}$ en $L^2(U)$ y $\|u_k\|_2 = 1$ para todo k . Esto contradice que $\tilde{u} = 0$.

(b) Veamos primero que $(u, v) := \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ define un producto interno en $H_{\Gamma_1}^1(U)$:

- Es inmediato que $(\cdot, \cdot)$ es simétrica y bilineal.
- También es directo que $(u, u) \geq 0$ para todo $u \in H_{\Gamma_1}^1(U)$. Sólo resta probar que si $u \in H_{\Gamma_1}^1(U)$ es tal que $(u, u) = 0$ entonces $u = 0$. Si $(u, u) = 0$ entonces $\nabla u = 0$ en casi todo punto. Luego, u es constante en casi todo punto de U (recordar que U es conexo). Como $u = 0$ en Γ_1 , se tiene que $u = 0$ en casi todo punto. Por lo tanto, $(\cdot, \cdot)$ es definida positiva.

Sean $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto interno en $H_{\Gamma_1}^1(U)$ y $\|\cdot\|_{1,2}$ la norma usual en $H^1(U)$. Usando la desigualdad (9) se obtiene que estas normas son equivalente sobre $H_{\Gamma_1}^1(U)$. Entonces, para probar que $H_{\Gamma_1}^1(U)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno $(\cdot, \cdot)$ basta probar que es un subespacio cerrado de $H^1(U)$.

Sea $\{u_k\} \subset H_{\Gamma_1}^1$ una sucesión convergente a $u \in H^1(U)$. Usando la continuidad del operador de traza, obtenemos que $u_k \rightarrow u$ en $L^2(\partial U)$. Razonando de manera análoga a lo hecho antes se obtiene que $u = 0$ sobre Γ_1 . Por lo tanto $u \in H_{\Gamma_1}^1(U)$.

(c) Supongamos que (8) tiene una solución $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$. Multiplicando miembro a miembro $-\Delta u = f$ por cualquier función $w \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$, e integrando luego sobre U , obtenemos:

$$-\int_U w(x) \Delta u(x) \, dx = \int_U f(x) w(x) \, dx.$$

Usando que la frontera de U es de clase C^1 , podemos integrar por partes el primer término. Usando, además, que $\partial_n u = g$ sobre Γ_2 y suponiendo que $w = 0$ sobre Γ_1 , se tiene:

$$\int_U \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) \, dx = \int_U f(x) w(x) \, dx + \int_{\Gamma_2} g(x) w(x) \, d\sigma.$$

Notar que cada término en la igualdad anterior está bien definido para $u, w \in H_{\Gamma_1}^1(U)$. Entonces, proponemos la siguiente formulación débil para (8):

$$\text{Hallar } u \in H_{\Gamma_1}^1(U) \text{ tal que } B[u, w] = \langle F, w \rangle \text{ para toda } w \in H_{\Gamma_1}^1(U), \quad (12)$$

donde:

$$\begin{aligned} B[u, w] &:= \int_U \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) \, dx & u, w \in H_{\Gamma_1}^1(U), \\ \langle F, w \rangle &:= \int_U f(x) w(x) \, dx + \int_{\Gamma_2} g(x) w(x) \, d\sigma & w \in H_{\Gamma_1}^1(U). \end{aligned}$$

Usaremos el teorema de Lax-Milgram para probar la existencia y unicidad de solución de (12). Basta entonces verificar que B es bilineal, continua y coersiva, y que F es lineal y continuo.

- Linealidad de B y F : Es una consecuencia directa de la linealidad de la integral.
- Continuidad de B : Usando la desigualdad de Hölder, obtenemos:

$$|B[u, w]| \leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla w\|_2 = \|u\| \|w\| \quad \forall u, w \in H_{\Gamma_1}^1(U).$$

- Coersividad de B : Es directa, ya que:

$$B[u, u] = \int_U |\nabla u(x)|^2 dx = \|u\|^2 \quad \forall u \in H_{\Gamma_1}^1(U).$$

- Continuidad de F : Usando las desigualdades de Hölder y de Poincaré, y la continuidad del operador de traza, se tiene:

$$\begin{aligned} |\langle F, w \rangle| &\leq \|f\|_2 \|w\|_2 + \|g\|_{L^2(\partial U)} \|w\|_{L^2(\partial U)} \\ &\leq \|f\|_2 \|w\|_2 + C_0 \|g\|_{L^2(\partial U)} \|w\|_{1,2} \\ &\leq C \|f\|_2 \|\nabla w\|_2 + C_0(C+1) \|g\|_{L^2(\partial U)} \|\nabla w\|_2 \\ &\leq \tilde{C} \|w\| \quad \forall w \in H_{\Gamma_1}^1(U), \end{aligned}$$

donde $C_0 > 0$ es la constante de continuidad para el operador de traza, $C > 0$ es la constante en la desigualdad de Poincaré y $\tilde{C} := (C\|f\|_2 + C_0(C+1)\|g\|_{L^2(\partial U)})$.