Ecuaciones diferenciales A/B - 2020 (primer cuatrimestre)
Docentes: Nicolas Saintier y Andrea Ceretani
Universidad de Buenos Aires

# PARCIAL 1 - 22/06/2020

RESOLUCIÓN

**Ejercicio 1.** Consideramos el problema:

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - u_x(x,t) = 0 \qquad x \in (0,\ell),\ t > 0, \tag{4.1}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \qquad t > 0, \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad x \in [0,\ell]. \tag{4.3}$$

(a) Resolución 1. Suponemos que el problema (4.1)-(4.3) admite una solución no nula de la forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad x \in [0,\ell],\ t > 0.$$

A partir de (4.1) y (4.2) se ve que $X$ debe ser solución de:

$$X''(x) + X'(x) - \lambda X(x) = 0 \qquad x \in (0,\ell), \tag{4.4}$$

$$X(0) = X(\ell) = 0, \tag{4.5}$$

y que $T$ debe ser solución de:

$$T'(t) = \lambda T(t) \qquad t > 0, \tag{4.6}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $\lambda = -1/4$ entonces la solución general del (4.4) es:

$$X(x) = Ae^{-x/2} + Bxe^{-x/2} \qquad x \in (0,\ell) \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Para que una función de esta forma verifique (4.5) se debe tener $A = B = 0$. Entonces descartamos $\lambda = -1/4$.
Si $\lambda > -1/4$ entonces el polinomio característico asociado a (4.4) admite dos soluciones reales distintas, $\omega_1$ y $\omega_2$. Entonces, la solución general de (4.4) es

$$X(x) = Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x} \qquad x \in (0,\ell) \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Nuevamente, para que una función de esta forma verifique (4.5) se debe tener $A = B = 0$. Entonces descartamos $\lambda > -1/4$.
Si $\lambda < -1/4$ entonces el polinomio característico asociado a (4.4) admite dos soluciones complejas dada por

$$\omega = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{|1 + 4\lambda|})$$

Entonces, la solución general de (4.4) es

$$X(x) = Ae^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{|1+4\lambda|}}{2}\, x\right) + Be^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{|1+4\lambda|}}{2}\, x\right),$$
$$x \in (0,\ell) \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Para que $X$ verifique $X(0)=0$, debe ser $B=0$. Luego, para que $X$ verifique $X(\ell)=0$, sin ser $X$ la función nula, debe ser:

$$\frac{\sqrt{|1+4\lambda|}}{2}\,\ell = k\pi \qquad \text{para algún} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Entonces, cualquier función de la forma:

$$X_k(x) = e^{-x/2}\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \qquad x\in(0,\ell), \quad k\in\mathbb{N},$$

es una solución no nula de (4.4)-(4.5), siempre que

$$\sqrt{|1+4\lambda|} = \frac{2k\pi}{\ell}, \qquad \text{es decir,} \quad \lambda = -\frac{k^2\pi^2}{\ell^2} - \frac{1}{4}.$$

Luego las soluciones de (4.6) son de la forma:

$$T_k(t) = Cste.\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{4}\right)t\right) \qquad t>0, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Entonces, cualquier función de la forma:

$$\begin{aligned} u_k(x,t) &= X_k(x)T_k(t) \\ &= Cste.\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\exp\left(-\frac{x}{2}-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{4}\right)t\right) \qquad x\in(0,\ell),\, t>0, \end{aligned}$$

satisface de (4.1) y (4.2).
Ahora proponemos una solución de (4.1)-(4.3) de la forma:

$$u(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \qquad x\in[0,\ell],\, t\geq 0, \tag{4.7}$$

donde $u_k(x,t) := c_k X_k(x) T_k(t)$ y $c_k$ es un número real a determinar, para cada $k\in\mathbb{N}$. Para que esta función verifique (4.3), se debe tener:

$$u(x,0) = \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) = f(x) \qquad x\in[0,\ell],\, t\geq 0,$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) f(x) \qquad x\in[0,\ell],\, t\geq 0.$$

Entonces, definimos $F(x) := e^{x/2} f(x)$ para $x\in[0,\ell]$, consideramos el desarrollo en serie de Fourier de senos de $F$ y escribimos:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k(F)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \qquad x\in[0,\ell],$$

donde

$$A_k(F) := \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F(x)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)dx \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{4.8}$$

Para que la función $u$ dada por (4.7) verifique la condición (4.3) debe ser $c_k = A_k(F)$.
Hemos obtenido que

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &:= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \\
&= \exp\left(-\frac{x}{2}-\frac{t}{4}\right)\sum_{k=1}^{\infty} A_k(F)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t\right) \qquad x\in[0,\ell],\ t\geq 0,
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

es una solución formal de (4.1)-(4.3), donde $A_k(F)$ está dado por (4.8).

<u>Resolución 2</u>. Definimos:

$$u(x,t) := v(x,t)\psi(x,t) \qquad x\in[0,\ell],\ t\geq 0, \tag{4.10}$$

donde $\psi$ es una función a determinar.
Operando formalmente, para $x\in(0,\ell)$ y $t>0$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= v_t(x,t)\psi(x,t) + v(x,t)\psi_t(x,t), \\
u_x(x,t) &= v_x(x,t)\psi(x,t) + v(x,t)\psi_x(x,t), \\
u_{xx}(x,t) &= v_{xx}(x,t)\psi(x,t) + 2v_x(x,t)\psi_x(x,t) + v(x,t)\psi_{xx}(x,t).
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
& u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - u_x(x,t) = 0 \\
\iff\quad & v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = \\
& \left(1+2\frac{\psi_x(x,t)}{\psi(x,t)}\right)v_x(x,t) - \left(\frac{\psi_t(x,t)-\psi_{xx}(t)-\psi_x(x,t)}{\psi(x,t)}\right)v(x,t).
\end{aligned}
$$

Como queremos que $v$ cumpla la ecuación del calor, buscamos $\psi$ tal que:

$$\frac{\psi_x(x,t)}{\psi(x,t)} = -\frac{1}{2} \qquad x\in(0,\ell),\ t>0 \tag{4.11}$$

$$\psi_t(x,t) - \psi_{xx}(t) - \psi_x(x,t) = 0 \qquad x\in(0,\ell),\ t>0. \tag{4.12}$$

La solución general (4.11) es:

$$\psi(x,t) = A(t)e^{-x/2} \qquad x\in(0,\ell),\ t>0, \tag{4.13}$$

donde $A(t)$ es una función a determinar. Usando (4.13) en (4.12), obtenemos:

$$A'(t) = \frac{1}{4}A(t) \qquad t>0,$$

cuya solución general es:

$$A(t) = Be^{-t/4} \qquad t>0.$$

Entonces, definimos:

$$\psi(x,t) := e^{-x/2-t/4} \qquad x\in[0,\ell],\ t\geq 0.$$

Esta función verifica las ecuaciones (4.11) y (4.12). Luego, el cambio de variable dependiente (4.10) transforma la ecuación (4.1) en la ecuación del calor $v_t(x,t) - v_{xx}(x,t)$, $x \in (0,\ell)$, $t > 0$.
Además,

$$v(0,t) = u(0,t)e^{t/4}, \qquad v(\ell,t) = u(\ell,t)e^{\ell/2+t/4}, \qquad v(x,0) = u(x,0)e^{x/2}.$$

Por lo tanto, la transformación (4.10) permite escribir al problema (4.1)-(4.3) como el siguiente problema de valores iniciales y de borde para la ecuación del calor:

$$\begin{aligned} v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) &= 0 && x \in (0,\ell),\ t > 0, && (4.14)\\ v(0,t) = v(\ell,t) &= 0 && t > 0, && (4.15)\\ v(x,0) &= F(x) && x \in [0,\ell], && (4.16) \end{aligned}$$

donde $F(x) := e^{x/2}f(x)$, $x \in [0,\ell]$.
Es la ecuación del calor común en $(0,\ell)$ con condiciones de borde de Dirichlet que se vio en la teórica (ver [1, Cap. 3] o los slides de teórica). Recordamos brevemente su resolución.
Suponemos que (4.14)-(4.16) admite una solución no nula de la forma:

$$v(x,t) = X(x)T(t) \qquad x \in (0,\ell),\ t > 0.$$

A partir de (4.14) y (4.15) se obtiene que $X$ debe ser solución de

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 && x \in (0,\ell), && (4.17)\\ X(0) = X(\ell) &= 0, && && (4.18) \end{aligned}$$

y que $T$ debe ser solución de

$$T'(t) = -\lambda T(t) \qquad t > 0, \qquad (4.19)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.
El problema (4.17)-(4.18) admite soluciones no nulas sólo si $\lambda = (k\pi/\ell)^2$ para algún $k \in \mathbb{N}$ (ver [1, Cap. 3]). En tal caso, se tiene que cualquier función de la forma:

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \qquad x \in [0,\ell], \quad k \in \mathbb{N},$$

es una solución no nula de (4.17)-(4.18).
Para $\lambda = (k\pi/\ell)^2$ se tiene que

$$T_k(t) := \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t\right) \qquad t \geq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

es una solución no nula de (4.19).
Ahora proponemos una solución de (4.14)-(4.16) de la forma:

$$v(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x,t) \qquad x \in [0,\ell],\ t \geq 0, \qquad (4.20)$$

donde $v_k(x,t) := c_k X_k(x) T_k(t)$ y $c_k$ es un valor a determinar, para cada $k \in \mathbb{N}$.
Consideramos el desarrollo en serie de Fourier de senos de $F$ y escribimos:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k(F) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) \qquad x \in [0,\ell],$$

donde

$$A_k(F) := \frac{2}{\ell} \int_0^\ell F(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) dx \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{4.21}$$

Entonces, para que la función $v$ dada por (4.20) verifique la condición (4.16), debe ser $c_k = A_k(F)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.
Luego, la función definida por:

$$\begin{aligned} u(x,t) &:= \exp\left(-\frac{x}{2} - \frac{t}{4}\right) v(x,t) \\ &= \exp\left(-\frac{x}{2} - \frac{t}{4}\right) \sum_{k=1}^{\infty} A_k(F) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2} t\right) \qquad x \in [0,\ell],\ t \geq 0, \end{aligned}$$

es una solución formal de (4.1)-(4.3).

(b) Sean $k \in \mathbb{N}$ y $t_0 > 0$. Para cada $x \in [0,\ell]$ y $t \geq t_0$, se tiene:

$$|u_k(x,t)| \leq |A_k(F)| \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2} t_0\right).$$

Además,

$$|A_k(F)| \leq \frac{2}{\ell} \int_0^\ell |F(x)|\, dx.$$

Entonces, si $F \in L^1([0,\ell])$ se tiene que:

$$|u_k(x,t)| \leq \frac{2}{\ell} \|F\|_1 \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2} t_0\right).$$

Notando que $\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2} t_0\right) < \infty$, sigue que $u$ está bien definida y es continua en $[0,\ell] \times (t_0,\infty)$. De la arbitrariedad de $t_0 > 0$ sigue que $u$ esto mismo vale en $[0,\ell] \times (0,\infty)$. En particular, $u$ satisface (4.2). Notar que

$$1 \leq e^{x/2} \leq e^{\ell/2} \qquad x \in [0,\ell], \tag{4.22}$$

por lo que $F \in L^1([0,\ell])$ si y sólo si $f \in L^1([0,\ell])$.

Además,

$$\begin{aligned}
\partial_t u_k(x,t) &= -\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{4}\right) A_k(F)\exp\left(-\frac{x}{2}-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{4}\right)t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right),\\
\partial_x u_k(x,t) &= -\frac{1}{2}A_k(F)\exp\left(-\frac{x}{2}-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{4}\right)t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\\
&\quad+\frac{k\pi}{\ell}A_k(F)\exp\left(-\frac{x}{2}-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{4}\right)t\right)\cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\\
\partial_{xx} u_k(x,t) &= \frac{1}{4}A_k(F)\exp\left(-\frac{x}{2}-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{4}\right)t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\\
&\quad-\frac{k\pi}{\ell}A_k(F)\exp\left(-\frac{x}{2}-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{4}\right)t\right)\cos\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\\
&\quad-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}A_k(F)\exp\left(-\frac{x}{2}-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{4}\right)t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right),
\end{aligned}$$

de donde se obtiene:

$$|\partial_t u_k(x,t)| \leq \frac{2}{\ell}\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{4}\right)\|F\|_1 \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t_0\right), \tag{4.23}$$

$$|\partial_x u(x,t)| \leq \frac{2}{\ell}\left(\frac{k\pi}{\ell}+\frac{1}{2}\right)\|F\|_1 \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t_0\right), \tag{4.24}$$

$$|\partial_{xx} u(x,t)| \leq \frac{2}{\ell}\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{k\pi}{\ell}+\frac{1}{4}\right)\|F\|_1 \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t_0\right). \tag{4.25}$$

Notando que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t_0\right) < \infty,$$

sigue que $u_t$, $u_x$ y $u_{xx}$ son continuas en $[0,\ell]\times(t_0,\infty)$ y que se obtienen derivando término a término. De la arbitrariedad de $t_0>0$, sigue que lo mismo vale en $[0,\ell]\times(0,\infty)$. En particular, $u$ satisface (4.1). Notar que el mismo razonamiento muestra que $u\in C^\infty(D)$ ya que para todo $j,\alpha$ se tiene que

$$|D_x^\alpha \partial_t^j u(t,x)| \leq C(1+k^{|\alpha|+2j})\exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t_0\right),$$

y la serie $\sum_k (1+k^{|\alpha|+2j})\exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t_0\right)$ es convergente.

Si, $\underline{F\in L^2([0,\pi])}$ entonces el desarrollo en serie de Fourier de senos de $F$ converge a $F$ en $L^2([0,\ell])$. Para que $u$ cumpla la condición (4.3) en el sentido de $L^2([0,\ell])$, se debe tener:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(F)\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{2}\right)t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \to F(x) \quad \text{cuando} \quad t\to 0^+,$$

en el sentido de $L^2([0,\ell])$. Usando la identidad de Parseval junto con que el desarrollo en serie de Fourier de senos de $F$ converge a $F$ en $L^2([0,\ell])$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{k=1}^{\infty} A_k(F)\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{2}\right)t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)-F(x)\|_2^2\\
&\quad=\frac{\ell}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(F))^2\left(\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{2}\right)t\right)-1\right)^2.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Bessel, obtenemos $\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(F))^2<\infty$. Luego, dado $\varepsilon>0$ existe $M>0$ tal que $\sum_{k=M+1}^{\infty}(A_k(F))^2<\varepsilon$. Además, para cada $k=1,\dots,M$ se tiene que

$$\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{2}\right)t\right)\to 1 \qquad \text{cuando} \quad t\to 0^+.$$

Entonces, para cada $k=1,\dots,M$ existe $\delta_k>0$ tal que si $0<t<\delta_k$ se tiene:

$$\left(\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{2}\right)t\right)-1\right)^2<\varepsilon.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(F))^2\left(\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{2}\right)t\right)-1\right)^2\\
&\quad=\sum_{k=1}^{M}(A_k(F))^2\left(\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{2}\right)t\right)-1\right)^2\\
&\qquad+\sum_{k=M+1}^{\infty}(A_k(F))^2\left(\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{2}\right)t\right)-1\right)^2\\
&\quad\leq\varepsilon\sum_{k=1}^{M}(A_k(F))^2+2\varepsilon,
\end{aligned}$$

si $0<t<\delta$ donde $\delta:=\text{mín}\{\delta_k : k=1,\dots,M\}$. Para estimar el segundo término hemos usado que $\left(\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{2}\right)t\right)-1\right)^2\leq 2$ para todo $t>0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{k=1}^{\infty} A_k(F)\exp\left(-\left(\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}+\frac{1}{2}\right)t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)-F(x)\|_2^2\\
&\quad\leq\varepsilon\frac{\ell}{2}\sum_{k=1}^{M}(A_k(F))^2+\varepsilon\ell \qquad \text{si} \quad 0<t<\delta,
\end{aligned}$$

Luego, $u$ verifica (4.3) en el sentido de $L^2([0,\ell])$.
Resumiendo, si $F\in L^2([0,\ell])$, se tiene que $u$ pertenece a $C^2(D)$, $u$ verifica (4.1) y (4.2), y $u$ verifica (4.3) en el sentido de $L^2([0,\ell])$, donde $D:=[0,\ell]\times(0,\infty)$. Finalmente, notamos que por (4.22), $F\in L^2([0,\ell])$ es equivalente a $f\in L^2([0,\ell])$.

(c) Si $F \in AC([0,\ell])$, $F' \in L^2([0,\ell])$ y $F(0) = F(\ell) = 0$, entonces la serie de Fourier de senos de $F'$ se obtienen derivando término a término la serie de Fourier de senos de $F$. Usando nuevamente la desigualdad de Bessel, vemos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (A_k(F))^2 < \infty.$$

Entonces, usando la desigualdad de Hölder, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(F)| \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |A_k(F)| \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} < \infty.$$

Notando ahora que para cada $x \in [0,\ell]$ y $t \geq 0$ resulta:

$$|u_k(x,t)| \leq |A_k(F)| \qquad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N},$$

se tiene que $u$ está bien definida y es continua en $[0,\ell] \times [0,\infty)$. Recordando que la serie de Fourier de $F$ converge uniformemente a $F$, se tiene que $u$ verifica (4.3). Finalmente, notamos que si $f \in AC([0,\ell])$, $f' \in L^2([0,\ell])$ y $f(0) = f(\ell) = 0$ entonces se tienen las condiciones pedidas sobre $F$ al comienzo.

(d) Sí, la solución hallada en el ítem (b) es la única solución del problema. Para demostrarlo consideremos dos soluciones de (4.1)-(4.3), digamos $u$ y $v$. Entonces, la función $w := u - v$ es solución del siguiente problema:

$$w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) - w_x(x,t) = 0 \qquad x \in (0,\ell),\ t > 0, \tag{4.26}$$
$$w(0,t) = w(\ell,t) = 0 \qquad t > 0, \tag{4.27}$$
$$w(x,0) = 0 \qquad x \in [0,\ell], \tag{4.28}$$

entendiendo que (4.28) se verifica en el sentido de $L^2([0,\ell])$ y que $w \in C^{2,1}(D)$. Vamos a mostrar que $w = 0$.
Multiplicando miembro a miembro (4.26) por $w$ e integrando sobre $[0,\ell]$ para cada $t > 0$ fijo, obtenemos:

$$\int_0^\ell (w(x,t)w_t(x,t) - w(x,t)w_{xx}(x,t) - w(x,t)w_x(x,t))\,dx = 0.$$

Ahora observamos lo siguiente:

$$\int_0^\ell w(x,t)w_t(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \partial_t (w(x,t))^2\,dx = \frac{1}{2}\partial_t \int_0^\ell (w(x,t))^2\,dx,$$

$$\begin{aligned}\int_0^\ell w(x,t)w_{xx}(x,t)\,dx &= w(x,t)w_x(x,t)\big|_0^\ell - \int_0^\ell (w_x(x,t))^2\,dx \\ &= -\int_0^\ell (w_x(x,t))^2\,dx,\end{aligned}$$

$$\int_0^\ell w(x,t)w_x(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\ell \partial_x (w(x,t)^2)\,dx = \frac{1}{2}\,(w(x,t))\big|_0^\ell = 0.$$

Entonces,

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_0^\ell (w(x,t))^2\, dx = -\int_0^\ell (w_x(x,t))^2\, dx \leq 0.$$

Por lo tanto, $t \mapsto \int_0^\ell (w(x,t)^2)\, dx$ es decreciente, es decir, $\int_0^\ell (w(x,t)^2)\, dx \leq \int_0^\ell (w(x,t')^2)\, dx$ si $t \geq t'$. Entonces, haciendo $t' \to 0^+$ y teniendo en cuenta que $w(\cdot,t') \to 0$ cuando $t' \to 0^+$ en $L^2([0,\ell])$, se tiene:

$$\int_0^\ell (w(x,t)^2)\, dx \leq 0 \qquad \text{para todo} \quad t > 0.$$

Como la desigualdad contraria también vale, se tiene que $w(x,t) = 0$ para casi todo $x \in [0,\ell]$ y todo $t > 0$. Notando que $w$ es continua, sigue que $w = 0$.

**Ejercicio 2.** Sea $u$ una solución del problema:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + c(t)u(x,t) &= 0 & & x \in U,\, t > 0, \\ u(x,t) &= 0 & & x \in \partial U,\, t \geq 0, \\ u(x,0) &= g(x) & & x \in U, \end{aligned}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, $c$ es continua y $g \geq 0$.

Sea $T > 0$. Notamos que $u$ es una solución en $C^{2,1}(U \times (0,T])$ de:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + c(t)u(x,t) &= 0 & & x \in U,\, t \in (0,T], & (4.29) \\ u(x,t) &= 0 & & x \in \partial U,\, t \in [0,T], & (4.30) \\ u(x,0) &= g(x) & & x \in U, & (4.31) \end{aligned}$$

y definimos:

$$v(x,t) := u(x,t)\varphi(t) \qquad x \in \bar{U},\, t \in [0,T],$$

donde

$$\varphi(t) := e^{\int_0^t c(s)\, ds} \qquad t \in [0,T].$$

Notar que $\varphi$ es $C^1$ ya que $c$ es continua.

Sea $(x,t) \in U \times (0,T]$. Multiplicando miembro a miembro de (4.29) por $\varphi(t)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi(t)(u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + c(t)u(x,t)) &= 0 & & \iff \\ \partial_t(u(x,t)\varphi(t)) - \Delta(u(x,t)\varphi(t)) &= 0 & & \iff \\ \partial_t v(x,t) - \Delta v(x,t) &= 0, \end{aligned}$$

es decir, $v$ es solución de la ecuación del calor en $U \times (0,T]$.

Entonces, por el principio del mínimo para la ecuación del calor (ver Teorema 6.3.1 en [1]), sabemos que

$$\min_{\overline{U_T}} v = \min_{\partial_p U_T} v,$$

donde $U_T := U \times (0,T]$ y $\partial_p U_T := \overline{U_T} - U_T$ es el borde parabólico de $U$.

Teniendo en cuenta que $v = 0$ sobre $\partial U \times [0,T]$ y que $v = g \geq 0$ en $U$, se tiene que $v \geq 0$ en $\partial_p U_T$. Entonces, $v \geq 0$ en $\bar{U} \times [0,T]$.

Como $\varphi > 0$, sigue que $u \geq 0$ en $\bar{U} \times [0,T]$. De la arbitrariedad de $T > 0$ sigue que $u \geq 0$ en $\bar{U} \times [0,\infty)$.

Nota: si $c = c(x,t)$ entonces el resultado sigue cierto si $c$ es continua y acotada. Tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $c \geq -\lambda$ en $\bar{U} \times (0,\infty)$ y definimos:

$$v(x,t) := u(x,t)e^{-\lambda t} \qquad x \in \bar{U},\, t \in [0,T].$$

Como $u \in C^{2,1}(U \times (0,T])$ verifica (4.29)-(4.31), se ve que $v$ es solución de:

$$\begin{aligned} v_t(x,t) - \Delta v(x,t) + (c+\lambda)u(x,t) &= 0 & & x \in U,\, t \in (0,T], & (4.32) \\ v(x,t) &= 0 & & x \in \partial U,\, t \in [0,T], & (4.33) \\ v(x,0) &= g(x) & & x \in U. & (4.34) \end{aligned}$$

Como $c + \lambda \geq 0$ vale que

$$\min_{\overline{U_T}} v \geq -\max_{\partial_p U_T} v^-,$$

donde $v^- := \text{máx}\{-v, 0\}$ es la parte negativa de $v$. Eso se prueba como en el Ejercicio 14 de la práctica 2. Como $v \geq 0$ en $\partial_p U_T$, sigue que $v^- = 0$ en $\partial_p U_T$. Luego $v \geq 0$ en $\overline{U_T}$, de donde sigue, igual que antes, que $u \geq 0$ en $U_T$.

**Ejercicio 3.** Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $|x|^\alpha f \in L^1(\mathbb{R})$ para algún $\alpha \in (0,1]$, y sea $\hat{f}$ su transformada de Fourier.

Para $y, z \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\hat{f}(y) - \hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(e^{-2i\pi xy} - e^{-2i\pi xz}\right) dx.$$

Además,

$$e^{-2i\pi xy} - e^{-2i\pi xz} = \int_y^z \partial_\xi (e^{-2i\pi x\xi})\, d\xi = -2i\pi x \int_y^z e^{-2i\pi x\xi}\, d\xi,$$

de donde se obtiene:

$$|e^{-2i\pi xy} - e^{-2i\pi xz}| \leq 2\pi|x||y-z|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(y) - \hat{f}(z)| \leq & \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left|e^{-2i\pi xy} - e^{-2i\pi xz}\right| dx \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left|e^{-2i\pi xy} - e^{-2i\pi xz}\right|^\alpha \left|e^{-2i\pi xy} - e^{-2i\pi xz}\right|^{1-\alpha} dx \\
\leq & \, 2^{1-\alpha} 2^\alpha \pi^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||x|^\alpha |y-z|^\alpha \, dx \\
= & \, C|y-z|^\alpha,
\end{aligned}$$

donde $C := 2\pi^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha |f(x)|\, dx$. Notar que $\left|e^{-2i\pi xy} - e^{-2i\pi xz}\right| \leq 2$.

**Ejercicio 4.** Sea $u$ una función Lipschitz continua en $\mathbb{R}^n$ que satisface:

$$\Delta u(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.35}$$
$$u(x) = 0 \qquad x = (0, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{4.36}$$

Como $u$ es Lipschitz continua en $\mathbb{R}^n$, existe $L > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{para todo} \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Combinando esto con (4.36), obtenemos:

$$|u(x)| = |u(x_1, x_2, \dots, x_n) - u(0, x_2, \dots, x_n)| \leq L|x_1| \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.37}$$

Entonces, dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se tiene (ver Teorema 4.4.3 en [1]):

$$\begin{aligned}
|D^\alpha u(x)| &\leq \frac{C}{r^{n+2}} \|u\|_{L^1(B_r(x))} \leq \frac{C}{r^{n+2}} \int_{B_r(x)} |u(y)|\, dy \\
&\leq \frac{CL}{r^{n+2}} \int_{B_r(x)} |y_1|\, dy \leq \frac{CL}{r^{n+2}} (r + |x|)|B_r(x)| \\
&\leq \frac{CL\omega_n}{r} + \frac{CL\omega_n |x|}{r^2},
\end{aligned}$$

donde $\alpha$ es un multiíndice de longitud 2 y $\omega_n$ es la medida de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Como lo anterior vale para cualquier $r > 0$, haciendo $r \to \infty$ se tiene $D^\alpha u(x) = 0$. De la arbitrariedad de $x \in \mathbb{R}^n$ sigue que $D^\alpha u = 0$ en $\mathbb{R}^n$. Luego, existen $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que:

$$u(x) = a \cdot x + b \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Como $u$ verifica (4.36), se tiene:

$$u(0, x_2, \dots, x_n) = a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b = 0 \qquad \text{para todo} \quad x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Considerando $(x_2, \dots, x_n) = 0$ se ve que $b = 0$, y considerando $(x_2, \dots, x_n) = e_j$, donde $e_j$ es el $j$-ésimo versor de la base canónica de $\mathbb{R}^{n-1}$, se ve que $a_{j+1} = 0$ para $j = 1, \dots, n-1$. Luego,

$$u(x) = \alpha x_1 \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\alpha := a_1$.

Referencias

[1] J. Fernández Bonder. *Ecuaciones Diferenciales Parciales.* Departamento de Matemática, FCEN-UBA, 2015.