Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)
Primer cuatrimestre 2020

Práctica 3: Límites y continuidad

1. Para cada una de las siguientes curvas determinar dominio y conjunto de puntos en los cuales resulta continua.

   a) $\sigma(t) = (\text{sen}(t), \cos(t))$,

   b) $\sigma(t) = \left(\dfrac{\text{sen}(t)}{t}, \ln(t^2 - t), t^2\right)$,

   c) $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ donde $\sigma_1(t) = \sqrt{t}$ y $\sigma_2(t) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen(t)}}{t} & \text{si} \quad t \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$

2. i) Usando la definición de límite demostrar que:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1$,

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,8)} xy = -8$.

   ii) Para $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/100$, encontrar $\delta > 0$ tal que

   $$\|(x, y) - (-1, 8)\| < \delta \Longrightarrow |xy + 8| < \varepsilon.$$

3. Probar por definición que

   $$\lim_{(x,y)\to(2,3)} y \ \text{sen}(xy - 6) = 0.$$

4. Analizar la existencia de los siguientes límites.

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy$,

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy}$,

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$,

   d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{x + y}$,

   e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$,

   f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$,

   g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}$,

   h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

   i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$,

   j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\text{sen}^2(x)}{x^4 + 2y^4}$,

   k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x^2(y - 3)^2e^x}{x^2 + (y - 3)^2}$.

5. Utilizar coordenadas polares para analizar la existencia de los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2),$$

$$c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}, \qquad d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

6. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

$$a)\ f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}, \qquad b)\ f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2-x}.$$

7. Determinar el conjunto de puntos en los cuales las siguientes funciones son continuas.

$$a)\ f(x,y) = \frac{xy}{1+e^{x-y}},$$

$$b)\ f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2},$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$d)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$e)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2-\operatorname{sen}(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^3\cos(y)}{(x-1)^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0), \\ a & \text{si} \quad (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

Hallar, si es posible, $a \in \mathbb{R}$ de manera que f resulte continua en $(1, 0)$.

9. Sea
$$f(x,y) = \frac{20}{1-x^2-y^2}.$$

   a) Calcular el dominio de f.

   b) Graficar f utilizando GeoGebra.

   c) ¿Es posible extender f a la circunferencia $C = \{x^2+y^2=1\}$ de manera continua? ¿Por qué?

10. Probar que la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

11. Demostrar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x,y) = g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a,y). Usar esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

   a) $f(x,y) = \text{sen}(x)$, *b)* $f(x,y) = \text{sen}(x^2) + e^y$.

12. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

   a) $f(x,y) = (x^2,\ e^x)$ *b)* $f(x,y) = \left(\dfrac{\text{sen}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\ ,\ \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right)$