

## Práctica 2: Curvas y superficies en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ - Funciones

---

Se sugiere complementar la resolución de los ejercicios de esta práctica con GeoGebra.

1. Graficar las siguientes curvas de  $\mathbb{R}^2$  dadas de forma paramétrica y decidir si son el gráfico de una función de la forma  $y = f(x)$ .

a)  $x = 3 - 4t, y = 2 - 3t,$                       b)  $x = 1 - t^2, y = t - 2, -2 \leq t \leq 2,$

c)  $x = t^2 + t, y = t^2 - t, -2 \leq t \leq 2,$                       d)  $x = t^2, y = t^3 - 4t, -3 \leq t \leq 3.$

2. En cada uno de los siguientes casos, describir de forma paramétrica la circunferencia de radio  $r$  y centro  $p$ .

a)  $r = 2, p = (0, 0),$                       b)  $r = 1, p = (1, 3),$                       c)  $r = 3, p = (0, 2).$

3. Graficar la región del plano que consiste en todos los puntos cuyas coordenadas polares verifican las siguientes condiciones.

a)  $r \geq 1,$                       b)  $0 \leq r < 2, \pi \leq \theta \leq 3\pi/2,$                       c)  $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6.$

4. Graficar las curvas dadas por las siguientes ecuaciones en coordenadas polares.

a)  $r = -2\text{sen}(\theta),$                       b)  $r = 1 - \cos(\theta).$

5. i) Graficar las siguientes curvas de  $\mathbb{R}^2$ .

a)  $x^2 + y^2 = 4,$                       b)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$                       c)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1,$

d)  $x = y^2.$

- ii) Para  $a, b \in \mathbb{R}$ , dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones utilizando deslizadores en GeoGebra.

a)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$                       b)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$                       c)  $x = ay^2.$

6. Graficar las siguientes superficies de  $\mathbb{R}^3$ .

a)  $y = 2x + 1,$                       b)  $y = x^2,$                       c)  $x^2 + y^2 = 1,$

d)  $4x^2 + y^2 = 4.$

7. i) Utilizando trazas, graficar las siguientes superficies de  $\mathbb{R}^3$ .

$$a) x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad b) z = x^2 + y^2, \quad c) x = y^2 + 4z^2,$$

$$d) z^2 = x^2 + y^2, \quad e) x^2 = y^2 + 4z^2, \quad f) z = x^2 - y^2,$$

$$g) x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad h) -x^2 - y^2 + z^2 = 1, \quad i) 4x^2 + 9y^2 + z = 0.$$

ii) Para  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , dar una descripción geométrica de las siguientes ecuaciones utilizando deslizadores en GeoGebra.

$$a) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad b) z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad c) z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

$$d) z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad e) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad f) -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

8. Graficar la región de  $\mathbb{R}^3$  acotada por las superficies  $x^2 + y^2 = 1$  y  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  para  $1 \leq z \leq 2$ .

9. Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones.

$$a) r(t) = \left( \sqrt{4-t^2}, 5t+1, \ln(t+1) \right), \quad b) r(t) = \left( 4t, \frac{3t}{t-2}, e^t \right).$$

10. Graficar la curva imagen de las siguientes funciones.

$$a) r(t) = (\cos(t), \sin(t), 1), \quad b) r(t) = (t, t^2, t-t^2),$$

$$c) r(t) = (t^2+t, t^2-t, (t^2-t)^2).$$

11. Hallar una función  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen describa los siguientes conjuntos.

a) el rectángulo de vértices  $(0, 2)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(1, 2)$  y  $(1, -2)$ ,

b) el triángulo de vértices  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$ .

12. i) Graficar la curva intersección de las siguientes superficies.

$$a) x^2 + y^2 = 4 \text{ y } z = xy, \quad b) x^2 + y^2 = 1 \text{ y } y + z = 2,$$

$$c) z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } z = 1 + y.$$

ii) Hallar una función  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya imagen describa las curvas graficadas en el ítem anterior.

13. Graficar el dominio de las siguientes funciones.

$$a) f(x, y) = \sqrt{2x - y},$$

$$b) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2},$$

$$c) f(x, y, z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2).$$

14. Para cada una de las siguientes funciones, calcular dominio, graficar las curvas de nivel y usarlas para graficar la función.

$$a) f(x, y) = 3y,$$

$$b) f(x, y) = \frac{1}{x},$$

$$c) f(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$d) f(x, y) = -x^2 - y^2,$$

$$e) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$f) f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$