Práctica 6

1. Sean A un anillo y G un grupo. Probar que $A[X]$ y $A[G]$ son A-módulos libres.

2. Sea A un anillo conmutativo.

   a) Probar que cualquier subconjunto $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ es linealmente dependiente. Concluir que si un ideal no nulo $I \subseteq A$ es un A-módulo libre, entonces $I \cong A$ como A-módulo –de donde sigue que I es un ideal principal.

   b) Sea $A = \mathbb{Z}[X]$. Probar que $I = \langle 2, X \rangle$ no es un A-módulo libre.

3. Probar que $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. ¿Es proyectivo?

4. Sean R un anillo y $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R-módulos. Probar que si cada M_i es proyectivo, entonces $\bigoplus_{i \in I} M_i$ es proyectivo y que si cada M_i es inyectivo entonces $\prod_{i \in I} M_i$ es inyectivo.

5. **Un producto arbitrario de módulos libres puede no ser libre.** Sea $M = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$; los elementos de M son sucesiones de números enteros indexadas por $\mathbb{N}$. El objetivo de este ejercicio es probar que M no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. Sea N el submódulo de M formado por las sucesiones de soporte finito –es decir, aquellas que tienen finitos coeficientes no nulos. Supongamos que M es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con base B.

   a) Probar que N es numerable.

   b) Probar que existe un subconjunto $B_1 \subseteq B$ tal que N está contenido en el submódulo N_1 generado por B_1. Probar que N_1 también es numerable.

   c) Sea $\overline{M} = M/N_1$. Probar que $\overline{M}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. Deducir que si $\overline{x} \in \overline{M}$ es no nulo, entonces existen finitos enteros k tales que $\overline{x} = k\overline{y}$ para algún $\overline{y} \in \overline{M}$ ($\overline{y}$ depende de k).

   d) Sea $S = \{(b_1, b_2, b_3, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \mid b_i = \pm i! \text{ para todo } i\}$. Probar que S es no numerable y deducir que existe $s \in S$ con $s \notin N_1$.

   e) Mostrar que la suposición de que M es libre lleva a una contraddicción: Por (d) podemos elegir $s \in S$ con $s \notin N_1$. Probar que para cada entero k existe algún $y \in M$ tal que $\overline{s} = k\overline{y}$, contradiciendo (c).

6. **Bases duales.** Sean A un anillo y P un A-módulo a izquierda. Una *base dual* para P es una familia $\{(x_i, f_i)\}_{i \in I}$ donde $(x_i, f_i) \in P \times P^*$ para cada $i \in I$, que cumple las siguientes condiciones:

   a) para todo $x \in P$ el conjunto $\{i \in I : f_i(x) \neq 0\}$ es finito, y

   b) para todo $x \in P$ vale la igualdad $x = \sum_{i \in I} f_i(x) x_i$.

Notar que (i) implica que la suma en (ii) tiene sentido.

a) Mostrar que un A-módulo P es proyectivo si y solo si posee una base dual.

b) Mostrar que un A módulo P es proyectivo y finitamente generado si y solo si posee una base dual finita.

7. Para cada A-módulo a izquierda M, sea $M^* = \operatorname{Hom}_A(M, A)$ con la estructura de A-módulo a derecha inducida por la estructura de A-módulo a derecha de A.

   a) Mostrar que si P es proyectivo y finitamente generado entonces P^* también lo es.

   b) Mostrar que si P es proyectivo y finitamente generado entonces el morfismo canónico $P \to P^{**}$ es un isomorfismo .

8. **Lema de los cinco.** Consideremos un diagrama conmutativo de R-módulos

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

   y supongamos que las dos filas son exactas. Probar

   i) Si α_1, α_2, α_4 y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.

   ii) Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.

   iii) Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.

9. **Resoluciones proyectivas.** Sea A un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

   a) Para cada A-módulo M existe un diagrama

$$\cdots \longrightarrow P_{p+1} \xrightarrow{d^p} P_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d^0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

   de A-módulos y morfismos de A-módulos que es exacto, y en el que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ el módulo P_p es proyectivo. El morfismo ϵ se llama *aumentación*, y el diagrama obtenido al reemplzar ϵ por 0 es llamado una *resolución proyectiva* de M.

   b) Los A-módulos P_p pueden elegirse libres para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

   c) Si $f\colon M \to N$ es un morfismo de A-módulos y

$$\cdots \longrightarrow P_p \longrightarrow P_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

   y

$$\cdots \longrightarrow Q_p \longrightarrow Q_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow 0$$

   son resoluciones proyectivas de M y N, respectivamente, entonces existen morfismos $f_p\colon P_p \to Q_p$ para cada $p \geq 0$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_p \arrow[r] \arrow[d, "f_p"] & P_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & Q_p \arrow[r] & Q_{p-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

d) Encontrar resoluciones proyectivas para

1) un A-módulo proyectivo;

2) el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$;

3) el $\Bbbk[X]$-módulo $S = \Bbbk[X]/\langle X \rangle$.

10. Sea A un grupo abeliano finito.

a) Probar que A no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo.

b) Probar que A no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

11. Probar que $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, pero $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sí lo son.

12. Sea C un grupo cíclico finito no trivial. Sea $\epsilon\colon C \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$, $\epsilon(x)(\phi) = \phi(x)$. Probar que el morfismo ϵ no es inyectivo.

13. Sean M un grupo abeliano y $x \in M$ no nulo. Probar que existe $\phi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tal que $\phi(x) \neq 0$.

14. Sea M un grupo abeliano y sea $I(M) = \prod_{f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Sea $\operatorname{ev}\colon M \to I(M)$, $\operatorname{ev}(m)_f = f(m)$ ($f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$). Probar que ev es un monomorfismo.

15. Sean R un anillo y $\mathcal{A}$ un grupo abeliano. Si M es un R-módulo a derecha, consideremos a $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathcal{A})$ con la estructura de R-módulo a izquierda definida por $(r \cdot f)(m) = f(mr)$. Si N es un módulo a izquierda, equipamos $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathcal{A})$ con la estructura de R-módulo a derecha dada por $(f \cdot r)(n) = f(rn)$. Sea M un R-módulo a derecha. Probar que

$$\tau\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathcal{A}) \to \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathcal{A})), \tau(f)(m)(r) = f(mr)$$

es un isomorfismo de grupos abelianos.

16. Probar que si $\mathcal{I}$ es un grupo abeliano inyectivo, entonces $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathcal{I})$ es un R-módulo a derecha inyectivo.

17. Probar que si R es un anillo y M un R módulo a derecha. Sea

$$\operatorname{ev}\colon M \to \prod_{\operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

la aplicación dada por $\operatorname{ev}(m)_f = f(m)$ para $f \in \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$. Probar que ev es un monomorfismo R-lineal.

18. Sean R un anillo y M un R-módulo.

i) Probar que existe una sucesión exacta de R-módulos

$$0 \to M \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots$$

tal que cada I_n es un R-módulo inyectivo. Una tal sucesión, con M reemplazado por 0, es una *resolución inyectiva* de M.

ii) Probar que si $f\colon M \to N$ es un morfismo de R-módulos y

$$0 \to N \to J_0 \to J_1 \to J_2 \to \dots$$

es una resolución inyectiva, entonces para cada $n \in \mathbb{N}_0$ existe un morfismo $f_n \in \mathrm{Hom}_R(I_n, J_n)$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & I_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & I_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & \dots \\
N \arrow[r] & J_0 \arrow[r] & J_1 \arrow[r] & J_2 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$