Álgebra II Práctica (clase 26)

Guido Arnone

Universidad de Buenos Aires

28 de Julio de 2020

Una introducción a la teoría de categorías

En esta clase daremos una introducción a las nociones básicas de teoría de categorías.

La exposición está basada en el libro *Category Theory in Context* de Emily Riehl.

Una introducción a la teoría de categorías

Motivados por la necesidad de formalizar la noción de que una familia de morfismos sea *natural*, en 1945 Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane publicaron "*The general theory of natural equivalences*".

Una introducción a la teoría de categorías

Motivados por la necesidad de formalizar la noción de que una familia de morfismos sea *natural*, en 1945 Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane publicaron "*The general theory of natural equivalences*".

Allí definieron la noción de transformación natural, y para ello, introdujeron la definición de categoría y funtor.

Una introducción a la teoría de categorías

Motivados por la necesidad de formalizar la noción de que una familia de morfismos sea *natural*, en 1945 Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane publicaron "*The general theory of natural equivalences*".

Allí definieron la noción de transformación natural, y para ello, introdujeron la definición de categoría y funtor.

Con el la teoría de categorías nace también una nueva técnica de demostración: la de perseguir diagramas conmutativos.

Categorías

Una categoría $\mathscr{C}$ consiste de:

- una familia de objetos $\mathrm{ob}\mathscr{C}$,

Categorías

Una categoría $\mathscr{C}$ consiste de:

- una familia de objetos $\mathrm{ob}\mathscr{C}$,
- para cada par de objetos $x, y \in \mathscr{C}$, una familia de morfismos (o flechas) $\hom_{\mathscr{C}}(x, y)$, y

Categorías

Una categoría $\mathscr{C}$ consiste de:

- una familia de objetos $\mathrm{ob}\mathscr{C}$,
- para cada par de objetos $x, y \in \mathscr{C}$, una familia de morfismos (o flechas) $\hom_{\mathscr{C}}(x, y)$, y
- una operación de composición

$$f : x \to y, g : y \to z \rightsquigarrow gf : x \to z$$

que satisface las siguientes propiedades:

  - todo objeto $x \in \mathscr{C}$ tiene un morfismo distinguido $1_x : x \to x$ llamado el morfismo identidad de x, que satisface

$$f1_x = f, \quad 1_x g = g$$

para todo par de flechas $f : x \to y, g : y \to x$.

Categorías

Una categoría $\mathscr{C}$ consiste de:

- una familia de objetos ob$\mathscr{C}$,
- para cada par de objetos $x, y \in \mathscr{C}$, una familia de morfismos (o flechas) $\hom_{\mathscr{C}}(x, y)$, y
- una operación de composición

$$f : x \to y, g : y \to z \rightsquigarrow gf : x \to z$$

  que satisface las siguientes propiedades:
  - todo objeto $x \in \mathscr{C}$ tiene un morfismo distinguido $1_x : x \to x$ llamado el morfismo identidad de x, que satisface

$$f1_x = f, \quad 1_x g = g$$

    para todo par de flechas $f : x \to y, g : y \to x$.
  - si $f : x \to y, g : y \to z, h : z \to w$, entonces

$$h(gf) = (hg)f.$$

Categorías - Ejemplos

Muchas construcciones que ya conocemos son instancias de categorías:

- la categoría Set de conjuntos y funciones,

Categorías - Ejemplos

Muchas construcciones que ya conocemos son instancias de categorías:

- la categoría Set de conjuntos y funciones,
- la categoría Grp de grupos y morfismos de grupos,

Categorías - Ejemplos

Muchas construcciones que ya conocemos son instancias de categorías:

- la categoría Set de conjuntos y funciones,
- la categoría Grp de grupos y morfismos de grupos,
- la categoría Ring de anillos y morfismos de anillos,

Categorías - Ejemplos

Muchas construcciones que ya conocemos son instancias de categorías:

- la categoría Set de conjuntos y funciones,
- la categoría Grp de grupos y morfismos de grupos,
- la categoría Ring de anillos y morfismos de anillos,
- la categoría Vect_k de k-espacios vectroriales y transformaciones lineales,

Categorías - Ejemplos

Muchas construcciones que ya conocemos son instancias de categorías:

- la categoría Set de conjuntos y funciones,
- la categoría Grp de grupos y morfismos de grupos,
- la categoría Ring de anillos y morfismos de anillos,
- la categoría Vect_k de k-espacios vectroriales y transformaciones lineales,
- la categoría Ab de grupos abelianos y morfismos de grupos,

Categorías - Ejemplos

Muchas construcciones que ya conocemos son instancias de categorías:

- la categoría Set de conjuntos y funciones,
- la categoría Grp de grupos y morfismos de grupos,
- la categoría Ring de anillos y morfismos de anillos,
- la categoría Vect_k de k-espacios vectoriales y transformaciones lineales,
- la categoría Ab de grupos abelianos y morfismos de grupos,
- la categoría ${}_R\mathrm{Mod}$ de R-módulos a izquierda y morfismos de módulos,

Otras que quizás conozcan son:

Categorías - Ejemplos

Muchas construcciones que ya conocemos son instancias de categorías:

- la categoría Set de conjuntos y funciones,
- la categoría Grp de grupos y morfismos de grupos,
- la categoría Ring de anillos y morfismos de anillos,
- la categoría Vect_k de k-espacios vectroriales y transformaciones lineales,
- la categoría Ab de grupos abelianos y morfismos de grupos,
- la categoría ${}_R\mathrm{Mod}$ de R-módulos a izquierda y morfismos de módulos,

Otras que quizás conozcan son:

- la categoría Meas de espacios de medida y funciones medibles,

Categorías - Ejemplos

Muchas construcciones que ya conocemos son instancias de categorías:

- la categoría Set de conjuntos y funciones,
- la categoría Grp de grupos y morfismos de grupos,
- la categoría Ring de anillos y morfismos de anillos,
- la categoría Vect_k de k-espacios vectroriales y transformaciones lineales,
- la categoría Ab de grupos abelianos y morfismos de grupos,
- la categoría ${}_R\mathrm{Mod}$ de R-módulos a izquierda y morfismos de módulos,

Otras que quizás conozcan son:

- la categoría Meas de espacios de medida y funciones medibles,
- la categoría Graph de grafos y morfismos de grafos,

Categorías - Ejemplos

Muchas construcciones que ya conocemos son instancias de categorías:

- la categoría Set de conjuntos y funciones,
- la categoría Grp de grupos y morfismos de grupos,
- la categoría Ring de anillos y morfismos de anillos,
- la categoría Vect_k de k-espacios vectroriales y transformaciones lineales,
- la categoría Ab de grupos abelianos y morfismos de grupos,
- la categoría ${}_R\mathrm{Mod}$ de R-módulos a izquierda y morfismos de módulos,

Otras que quizás conozcan son:

- la categoría Meas de espacios de medida y funciones medibles,
- la categoría Graph de grafos y morfismos de grafos,
- la categoría Top de espacios topológicos y funciones continuas.

Categorías - Ejemplos

Veamos algunos ejemplos menos familiares.

Un poset P se puede pensar como una categoría: los objetos son los elementos del poset, y $\hom_P(x, y)$ tiene una única flecha si $x \leq y$ y es vacío en caso contrario.

Categorías - Ejemplos

Veamos algunos ejemplos menos familiares.

Un poset P se puede pensar como una categoría: los objetos son los elementos del poset, y $\hom_P(x, y)$ tiene una única flecha si $x \leq y$ y es vacío en caso contrario.

Si $P = \{a, b, c, d\}$ con $a \leq b, d \leq d$, tenemos el siguiente dibujo

$$\begin{tikzcd} & d & \\ c \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \\ & a \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Si $P = (\mathbb{N}_0, \leq)$, el dibujo es

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots$$

Categorías - Ejemplos

La categoría Set_* de conjuntos punteados tiene por objetos a pares (X, x) donde X es un conjunto y $x \in X$.

Categorías - Ejemplos

La categoría Set_* de conjuntos punteados tiene por objetos a pares (X, x) donde X es un conjunto y $x \in X$. Un morfismo $f : (X, x) \to (Y, y)$ es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y$.

Categorías - Ejemplos

La categoría Set_* de conjuntos punteados tiene por objetos a pares (X, x) donde X es un conjunto y $x \in X$. Un morfismo $f : (X, x) \to (Y, y)$ es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y$.

Como vimos para un poset, no necesariamente los morfismos en una categoría son funciones.

Categorías - Ejemplos

La categoría Set_* de conjuntos punteados tiene por objetos a pares (X, x) donde X es un conjunto y $x \in X$. Un morfismo $f : (X, x) \to (Y, y)$ es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y$.

Como vimos para un poset, no necesariamente los morfismos en una categoría son funciones.

Otro ejemplo más es el de la categoría $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}$ de matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$, donde los objetos son números naturales y un morfismo $n \to m$ es una matriz $A \in \mathrm{M}_{m,n}(R)$,

$$\mathrm{ob}\ \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}} = \mathbb{N}, \quad \mathrm{hom}(n, m) = \mathrm{M}_{m,n}(R).$$

La composición de $n \xrightarrow{A} m$ y $m \xrightarrow{B} k$ es $n \xrightarrow{BA} k$ y las identidades $1_n = I_n$.

Morfismos

Si $\mathscr{C}$ es una categoría, un morfismo $f : x \to y$ se dice un

- isomorfismo si existe $g : y \to x$ tal que $gf = 1_x$ y $fg = 1_y$,

Morfismos

Si $\mathscr{C}$ es una categoría, un morfismo $f : x \to y$ se dice un

- isomorfismo si existe $g : y \to x$ tal que $gf = 1_x$ y $fg = 1_y$,
- monomorfismo si $fg = fh$ implica $g = h$,

Morfismos

Si $\mathscr{C}$ es una categoría, un morfismo $f : x \to y$ se dice un

- isomorfismo si existe $g : y \to x$ tal que $gf = 1_x$ y $fg = 1_y$,
- monomorfismo si $fg = fh$ implica $g = h$,
- epimorfismo si $gf = hf$ implica $g = h$.

Morfismos

Si $\mathscr{C}$ es una categoría, un morfismo $f : x \to y$ se dice un

- isomorfismo si existe $g : y \to x$ tal que $gf = 1_x$ y $fg = 1_y$,
- monomorfismo si $fg = fh$ implica $g = h$,
- epimorfismo si $gf = hf$ implica $g = h$.

La noción de isomorfismo en las categorías que conocemos coincide con esta definición.

Morfismos

Si $\mathscr{C}$ es una categoría, un morfismo $f : x \to y$ se dice un

- isomorfismo si existe $g : y \to x$ tal que $gf = 1_x$ y $fg = 1_y$,
- monomorfismo si $fg = fh$ implica $g = h$,
- epimorfismo si $gf = hf$ implica $g = h$.

La noción de isomorfismo en las categorías que conocemos coincide con esta definición.

Las nociones de mono y epi coinciden con las que definimos para $\mathsf{Set}, \mathsf{Grp}$ y ${}_R\mathsf{Mod}$, pero no para Ring.

Morfismos

Si $\mathscr{C}$ es una categoría, un morfismo $f : x \to y$ se dice un

- isomorfismo si existe $g : y \to x$ tal que $gf = 1_x$ y $fg = 1_y$,
- monomorfismo si $fg = fh$ implica $g = h$,
- epimorfismo si $gf = hf$ implica $g = h$.

La noción de isomorfismo en las categorías que conocemos coincide con esta definición.

Las nociones de mono y epi coinciden con las que definimos para $\mathsf{Set}, \mathsf{Grp}$ y ${}_R\mathsf{Mod}$, pero no para Ring. Allí, la inclusión $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es tanto mono como epi, pero no iso.

Morfismos

Si $\mathscr{C}$ es una categoría, un morfismo $f : x \to y$ se dice un

- isomorfismo si existe $g : y \to x$ tal que $gf = 1_x$ y $fg = 1_y$,
- monomorfismo si $fg = fh$ implica $g = h$,
- epimorfismo si $gf = hf$ implica $g = h$.

La noción de isomorfismo en las categorías que conocemos coincide con esta definición.

Las nociones de mono y epi coinciden con las que definimos para $\mathsf{Set}, \mathsf{Grp}$ y ${}_R\mathsf{Mod}$, pero no para Ring. Allí, la inclusión $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ es tanto mono como epi, pero no iso.

Lo que sí vale es que en estos casos si un morfismo como función es inyectivo (resp. sobreyectivo) entonces es mono (resp. epi). Esto es cierto para una familia de categorías llamadas categorías concretas.

La categoría BG

Si G es un grupo, se tiene asociada la categoría BG que consiste de:

La categoría BG

Si G es un grupo, se tiene asociada la categoría BG que consiste de:

- un único objeto $\bullet$, y

La categoría BG

Si G es un grupo, se tiene asociada la categoría BG que consiste de:

- un único objeto $\bullet$, y
- para cada $g \in G$, un morfismo $\bullet \xrightarrow{g} \bullet$.

La categoría BG

Si G es un grupo, se tiene asociada la categoría BG que consiste de:

- un único objeto $\bullet$, y
- para cada $g \in G$, un morfismo $\bullet \xrightarrow{g} \bullet$.

La composición está dada por $\bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{h} \bullet \rightsquigarrow \bullet \xrightarrow{hg} \bullet$ y $1_\bullet = \bullet \xrightarrow{1_G} \bullet$.

La categoría BG

Si G es un grupo, se tiene asociada la categoría BG que consiste de:

- un único objeto $\bullet$, y
- para cada $g \in G$, un morfismo $\bullet \xrightarrow{g} \bullet$.

La composición está dada por $\bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{h} \bullet \rightsquigarrow \bullet \xrightarrow{hg} \bullet$ y $1_\bullet = \bullet \xrightarrow{1_G} \bullet$.

Observemos que aquí todo morfismo $g : \bullet \to \bullet$ es un isomorfismo con inversa $g^{-1} : \bullet \to \bullet$.

Una categoría donde todo morfismo es un isomorfismo se dice un grupoide.

Funtores

Un principio constante de la teoría de la categorías es que lo imporante son los morfismos. Dada una familia de "objetos" de interés, debemos preguntarnos: ¿qué relaciones hay entre ellos que preserven la estructura deseada? ¿cuáles son los morfismos?

Funtores

Un principio constante de la teoría de la categorías es que lo imporante son los morfismos. Dada una familia de "objetos" de interés, debemos preguntarnos: ¿qué relaciones hay entre ellos que preserven la estructura deseada? ¿cuáles son los morfismos?

Podemos pensar categorías son en sí mismo un "objeto", así que tiene sentido considerar la noción de morfismos entre categorías.

Funtores

Un principio constante de la teoría de la categorías es que lo imporante son los morfismos. Dada una familia de "objetos" de interés, debemos preguntarnos: ¿qué relaciones hay entre ellos que preserven la estructura deseada? ¿cuáles son los morfismos?

Podemos pensar categorías son en sí mismo un "objeto", así que tiene sentido considerar la noción de morfismos entre categorías.

Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ covariante (resp. contravariante) consiste en dar:

Funtores

Un principio constante de la teoría de la categorías es que lo imporante son los morfismos. Dada una familia de "objetos" de interés, debemos preguntarnos: ¿qué relaciones hay entre ellos que preserven la estructura deseada? ¿cuáles son los morfismos?

Podemos pensar categorías son en sí mismo un "objeto", así que tiene sentido considerar la noción de morfismos entre categorías.

Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ covariante (resp. contravariante) consiste en dar:

- para cada objeto $x \in \mathscr{C}$, un objeto $Fx \in \mathscr{D}$, y

Funtores

Un principio constante de la teoría de la categorías es que lo imporante son los morfismos. Dada una familia de "objetos" de interés, debemos preguntarnos: ¿qué relaciones hay entre ellos que preserven la estructura deseada? ¿cuáles son los morfismos?

Podemos pensar categorías son en sí mismo un "objeto", así que tiene sentido considerar la noción de morfismos entre categorías.

Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ covariante (resp. contravariante) consiste en dar:

- para cada objeto $x \in \mathscr{C}$, un objeto $Fx \in \mathscr{D}$, y
- para cada flecha $f : x \to y$ en $\mathscr{C}$, una flecha $Ff : Fx \to Fy$ en $\mathscr{D}$

tales que

Funtores

Un principio constante de la teoría de la categorías es que lo imporante son los morfismos. Dada una familia de "objetos" de interés, debemos preguntarnos: ¿qué relaciones hay entre ellos que preserven la estructura deseada? ¿cuáles son los morfismos?

Podemos pensar categorías son en sí mismo un "objeto", así que tiene sentido considerar la noción de morfismos entre categorías.

Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ covariante (resp. contravariante) consiste en dar:

- para cada objeto $x \in \mathscr{C}$, un objeto $Fx \in \mathscr{D}$, y
- para cada flecha $f : x \to y$ en $\mathscr{C}$, una flecha $Ff : Fx \to Fy$ en $\mathscr{D}$

tales que

- $F1_x = 1_{Fx}$, y
- $F(fg) = (Ff)(Fg)$ (resp. $F(fg) = (Fg)(Ff)$).

Concretamente, un funtor preserva exactamente lo que define a una categoría: objetos, flechas, composición e identidades.

Funtores - Ejemplos

Si $\mathscr{C}$ es $\mathsf{Set}, \mathsf{Grp}, \mathsf{Ring}$ o ${}_R\mathsf{Mod}$, tenemos un funtor

$$U : \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$$

llamado el funtor olvido, que envía un conjunto (resp. grupo, anillo, módulo) a su conjunto subyacente y un morfismo a la función subyactente.

Funtores - Ejemplos

Si $\mathscr{C}$ es $\mathsf{Set}, \mathsf{Grp}, \mathsf{Ring}$ o ${}_R\mathsf{Mod}$, tenemos un funtor

$$U : \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$$

llamado el funtor olvido, que envía un conjunto (resp. grupo, anillo, módulo) a su conjunto subyacente y un morfismo a la función subyactente.

Si $f : P \to Q$ es un morfismo de posets, es un funtor entre las categorías que les corresponden. A cada objeto $x \in P$ le asignamos $f(x) \in Q$, y a cada flecha $x \to y$ (es decir, cada vez que $x \leq y$) la única flecha $f(x) \to f(y)$ (ya que $f(x) \leq f(y)$).

Funtores - Ejemplos

Si $\mathscr{C}$ es $\mathsf{Set}, \mathsf{Grp}, \mathsf{Ring}$ o ${}_R\mathsf{Mod}$, tenemos un funtor

$$U : \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$$

llamado el funtor olvido, que envía un conjunto (resp. grupo, anillo, módulo) a su conjunto subyacente y un morfismo a la función subyactente.

Si $f : P \to Q$ es un morfismo de posets, es un funtor entre las categorías que les corresponden. A cada objeto $x \in P$ le asignamos $f(x) \in Q$, y a cada flecha $x \to y$ (es decir, cada vez que $x \leq y$) la única flecha $f(x) \to f(y)$ (ya que $f(x) \leq f(y)$).

Si $\varphi : G \to H$ es un morfismo de grupos, entonces se tiene un funtor $F : BG \to BH$ que envía $\bullet$ a $\bullet$ y cada flecha $\bullet \xrightarrow{g} \bullet$ a $\bullet \xrightarrow{\varphi(g)} \bullet$.

Funtores - Ejemplos

Si R es un anillo, sus unidades forman un grupo $\mathcal{U}(R)$. A su vez, si $f : R \to S$ es un morfismo de anillos entonces este induce un morfismo $\mathcal{U}f : r \in \mathcal{U}(R) \mapsto f(r) \in \mathcal{U}(S)$ entre los grupos de unidades.

Funtores - Ejemplos

Si R es un anillo, sus unidades forman un grupo $\mathcal{U}(R)$. A su vez, si $f : R \to S$ es un morfismo de anillos entonces este induce un morfismo $\mathcal{U}f : r \in \mathcal{U}(R) \mapsto f(r) \in \mathcal{U}(S)$ entre los grupos de unidades.

Como esta asignación respeta composición e identidades, define un funtor

$$\mathcal{U}(-) : \mathsf{Ring} \to \mathsf{Grp}.$$

De forma similar, un morfismo $f : M \to N$ entre R-módulos se (co)restringe a la torsión $\tau f : x \in \tau(M) \mapsto f(x) \in \tau(N)$, definiendo así un funtor

$$\tau : {}_R\mathsf{Mod} \to {}_R\mathsf{Mod}$$

Funtores - Ejemplos

Un ejemplo central de funtor (que ya conocemos!) es el del funtor hom. Si $\mathscr{C}$ es una categoría *localmente pequeña* y x un objeto allí, se tienen funtores

Funtores - Ejemplos

Un ejemplo central de funtor (que ya conocemos!) es el del funtor hom. Si $\mathscr{C}$ es una categoría *localmente pequeña* y x un objeto allí, se tienen funtores

$$\hom_{\mathscr{C}}(x,-):\mathscr{C}\to \mathrm{Set},\quad \hom_{\mathscr{C}}(-,x):\mathscr{C}\to \mathrm{Set}$$

covariantes y contravariantes respectivamente, que envían $y\in\mathscr{C}$ a $\hom_{\mathscr{C}}(x,y),\hom_{\mathscr{C}}(y,x)$ y $f:y\to z$ a

$$f_*:g\in\hom_{\mathscr{C}}(x,y)\mapsto fg\,\hom_{\mathscr{C}}(x,z)$$

y

$$f^*:g\in\hom_{\mathscr{C}}(y,x)\mapsto gf\,\hom_{\mathscr{C}}(z,x)$$

respectivamente.

Funtores - Ejemplos

Antes de seguir, hagamos *una* demostración.

Proposición

Un funtor preserva isomorfismos. Es decir, si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *es un funtor y* $f \in \mathscr{C}$ *un isomorfismo, entonces* $Ff \in \mathscr{D}$ *es un isomorfismo.*

Funtores - Ejemplos

Antes de seguir, hagamos *una* demostración.

Proposición

Un funtor preserva isomorfismos. Es decir, si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor y $f \in \mathscr{C}$ un isomorfismo, entonces $Ff \in \mathscr{D}$ es un isomorfismo.

Demostración.

Como $f : x \to y$ es isomorfismo, existe una flecha $g : y \to x$ tal que $gf = 1_x$ y $fg = 1_y$. Aplicando F, se obtiene que $FgFf = F(gf) = F(1_x) = 1_{Fx}$ y similarmente $FfFg = 1_{Fy}$, así que Ff es isomorfismo con inversa Fg. $\square$

Funtores - Ejemplos

Antes de seguir, hagamos *una* demostración.

Proposición

Un funtor preserva isomorfismos. Es decir, si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *es un funtor y* $f \in \mathscr{C}$ *un isomorfismo, entonces* $Ff \in \mathscr{D}$ *es un isomorfismo.*

Demostración.

Como $f : x \to y$ es isomorfismo, existe una flecha $g : y \to x$ tal que $gf = 1_x$ y $fg = 1_y$. Aplicando F, se obtiene que $FgFf = F(gf) = F(1_x) = 1_{Fx}$ y similarmente $FfFg = 1_{Fy}$, así que Ff es isomorfismo con inversa Fg. □

Como corolario obtenemos en particular que anillos isomorfos tienen grupos de unidades isomorfos, y las torsiones de módulos isomorfos son isomorfas.

Funtores - Ejemplos

Para terminar con los ejemplos de funtores, veamos un caso analítico.

Consideremos la categoría Euclid_* que tiene por objetos a pares (R^n, p) con $p \in \mathbb{R}^n$ y por flechas $(\mathbb{R}^n, p) \to (\mathbb{R}^m, q)$ funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tales que $f(p) = q$.

Funtores - Ejemplos

Para terminar con los ejemplos de funtores, veamos un caso analítico.

Consideremos la categoría Euclid_* que tiene por objetos a pares (R^n, p) con $p \in \mathbb{R}^n$ y por flechas $(\mathbb{R}^n, p) \to (\mathbb{R}^m, q)$ funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tales que $f(p) = q$.

Tenemos una asignación

$$D : \text{Euclid}_* \to \text{Mat}_{\mathbb{R}}$$

que envía $f : (\mathbb{R}^n, p) \to (\mathbb{R}^m, q)$ a $n \xrightarrow{D_p f} m$.

Funtores - Ejemplos

Para terminar con los ejemplos de funtores, veamos un caso analítico.

Consideremos la categoría Euclid_* que tiene por objetos a pares (R^n, p) con $p \in \mathbb{R}^n$ y por flechas $(\mathbb{R}^n, p) \to (\mathbb{R}^m, q)$ funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tales que $f(p) = q$.

Tenemos una asignación

$$D : \text{Euclid}_* \to \text{Mat}_{\mathbb{R}}$$

que envía $f : (\mathbb{R}^n, p) \to (\mathbb{R}^m, q)$ a $n \xrightarrow{D_p f} m$. Como $D_p \text{id}_{\mathbb{R}^n} = I_n$ y por la regla de la cadena dadas $(\mathbb{R}^n, p) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^m, f(p)) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}^k, gf(p))$ es

$$D_p(gf) = D_{f(p)}g \cdot D_p f,$$

vemos que D es un funtor.

Funtores - Ejemplos

Para terminar con los ejemplos de funtores, veamos un caso analítico.

Consideremos la categoría Euclid_* que tiene por objetos a pares (R^n, p) con $p \in \mathbb{R}^n$ y por flechas $(\mathbb{R}^n, p) \to (\mathbb{R}^m, q)$ funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathscr{C}^\infty$ tales que $f(p) = q$.

Tenemos una asignación

$$D : \mathrm{Euclid}_* \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}$$

que envía $f : (\mathbb{R}^n, p) \to (\mathbb{R}^m, q)$ a $n \xrightarrow{D_p f} m$. Como $D_p \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = I_n$ y por la regla de la cadena dadas $(\mathbb{R}^n, p) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^m, f(p)) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}^k, gf(p))$ es

$$D_p(gf) = D_{f(p)} g \cdot D_p f,$$

vemos que D es un funtor. En particular vemos si f es un difeomorfismo, su diferencial es inversible.

Transformaciones Naturales

Pasamos ahora sí a discutir muy brevemente la noción de naturalidad. Una transformación natural es un morfismo de funtores.

Transformaciones Naturales

Pasamos ahora sí a discutir muy brevemente la noción de naturalidad. Una transformación natural es un morfismo de funtores.

Formalmente, si $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ son funtores, una transformación natural $\eta : F \Rightarrow G$ es una colección de flechas $\eta_x : Fx \to Gx$ para cada $x \in \mathscr{C}$ tales que para todo $f : x \to y$ en $\mathscr{C}$ el cuadrado

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\eta_x"'] & Fy \arrow[d, "\eta_y"] \\ Gx \arrow[r, "Gf"] & Gy \end{tikzcd}$$

conmuta. Si cada η_x es un isomorfismo, decimos que η es un isomorfismo natural.

Funtores Representables

Vamos a concentrarnos en un caso muy particular de este lenguaje.

Definición

Decimos que un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ *es representable si es naturalmente isomorfo a* $\hom_{\mathscr{C}}(x, -)$ *ó* $\hom_{\mathscr{C}}(-, x)$ *para algún* $x \in \mathscr{C}$*.*

Un tal x *junto con el isomorfismo* η *forman una representación de* F*, y decimos que* F *codifica una propiedad universal de* x*.*

Funtores Representables

Vamos a concentrarnos en un caso muy particular de este lenguaje.

Definición

Decimos que un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ *es representable si es naturalmente isomorfo a* $\hom_{\mathscr{C}}(x, -)$ *ó* $\hom_{\mathscr{C}}(-, x)$ *para algún* $x \in \mathscr{C}$*.*

Un tal x *junto con el isomorfismo* η *forman una representación de* F*, y decimos que* F *codifica una propiedad universal de* x*.*

Veamos ejemplos de este fenómeno.

Funtores Representables

Consideremos el funtor contravariante

$$\mathcal{P}(-) : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$$

que envía un conjunto X a su conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ y una función $f : X \to Y$ a la función "tomar preimagen"

$$f^{-1} : S \in \mathcal{P}(Y) \mapsto f^{-1}(S) \in \mathcal{P}(X).$$

Funtores Representables

Consideremos el funtor contravariante

$$\mathcal{P}(-) : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$$

que envía un conjunto X a su conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ y una función $f : X \to Y$ a la función "tomar preimagen"

$$f^{-1} : S \in \mathcal{P}(Y) \mapsto f^{-1}(S) \in \mathcal{P}(X).$$

Dar un subconjunto de $S \subset X$ se corresponde *canónicamente* con función $\chi_S : X \to \Omega := \{0, 1\}$, que envía $x \in X$ a 1 si $x \in S$ y a 0 en caso contrario. Podemos formalizar esto: la familia de funciones

$$\eta_X : \chi_S \in \hom_{\mathsf{Set}}(X, \Omega) \mapsto S \in \mathcal{P}(X)$$

dan un isomorfismo natural $\eta : \hom_{\mathsf{Set}}(-, \Omega) \Rightarrow \mathcal{P}(-)$.

Funtores Representables

Recordemos que un morfismo de grupos $\mathbb{Z} \to G$ *se corresponde* con dar un elemento $g \in G$ como imagen del $1 \in \mathbb{Z}$.

Funtores Representables

Recordemos que un morfismo de grupos $\mathbb{Z} \to G$ *se corresponde* con dar un elemento $g \in G$ como imagen del $1 \in \mathbb{Z}$. De esta forma, los elementos de G como conjunto se corresponden con funciones $\mathbb{Z} \to G$.

Formalmente, las flechas

$$\eta_G : f \in \hom_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in UG$$

dan un isomorfismo natural entre el funtor olvido $U : \mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ y el funtor $\hom_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}, -)$.

Funtores Representables

Veamos un último ejemplo, un poco más sofisticado.

Funtores Representables

Veamos un último ejemplo, un poco más sofisticado.

Recordemos que el anillo de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ polinomios de Laurent es isomorfo a $\mathbb{Z}[C]$ con C un grupo cíclico infinito.

Funtores Representables

Veamos un último ejemplo, un poco más sofisticado.

Recordemos que el anillo de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ polinomios de Laurent es isomorfo a $\mathbb{Z}[C]$ con C un grupo cíclico infinito. Por la propiedad universal del anillo de un grupo, dar un morfismo $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \to A$ se corresponde con elegir un elemento $a \in \mathcal{U}(A)$ como imagen de t.

Funtores Representables

Veamos un último ejemplo, un poco más sofisticado.

Recordemos que el anillo de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ polinomios de Laurent es isomorfo a $\mathbb{Z}[C]$ con C un grupo cíclico infinito. Por la propiedad universal del anillo de un grupo, dar un morfismo $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \to A$ se corresponde con elegir un elemento $a \in \mathcal{U}(A)$ como imagen de t.

Esta correspondencia es natural: las funciones

$$\eta_A : f \in \hom_{\mathsf{Ring}}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}], A) \mapsto f(t) \in \mathcal{U}(A)$$

dan un isomorfismo natural entre el funtor $\hom_{\mathsf{Ring}}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}], -)$ y la composición entre el funtor de unidades y el funtor olvido,

$$U\mathcal{U} : \mathsf{Ring} \to \mathsf{Set}.$$

El lema de Yoneda

Para terminar, enunciamos uno de los resultados "más importantes de la teoría de categorías",

El lema de Yoneda

Para terminar, enunciamos uno de los resultados "más importantes de la teoría de categorías",

Lema (Yoneda)

Sea $\mathscr{C}$ una categoría loc. pequeña y $F : \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ un funtor. Para cada $x \in \mathscr{C}$ hay una biyección

$$\alpha \in \mathrm{Nat}(\mathsf{hom}_{\mathscr{C}}(x, -), F) \mapsto \alpha_x(1_x) \in Fx.$$

El lema de Yoneda

Para terminar, enunciamos uno de los resultados "más importantes de la teoría de categorías",

Lema (Yoneda)

Sea $\mathscr{C}$ una categoría loc. pequeña y $F : \mathscr{C} \to \mathsf{Set}$ un funtor. Para cada $x \in \mathscr{C}$ hay una biyección

$$\alpha \in \mathrm{Nat}(\mathsf{hom}_{\mathscr{C}}(x, -), F) \mapsto \alpha_x(1_x) \in Fx.$$

Corolario

Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña y $x, y \in \mathscr{C}$. Son equivalentes:

- *x e y son isomorfos.*
- $\mathsf{hom}_{\mathscr{C}}(x, -)$ *y* $\mathsf{hom}_{\mathscr{C}}(y, -)$ *son naturalmente isomorfos.*
- $\mathsf{hom}_{\mathscr{C}}(-, x)$ *y* $\mathsf{hom}_{\mathscr{C}}(-, y)$ *son naturalmente isomorfos.*

Intuitivamente, dos objetos son isomorfos si y sólo si se "relacionan de igual forma" con el resto de los objetos de la categoría.

Continuará... (en otras materias!)