Álgebra II Práctica (clase 25)

Iván Sadofschi Costa

Universidad de Buenos Aires

24 de Julio de 2020

Un ejercicio de teorema de estructura

Ejercicio

Sea $V = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ *el* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial de las sucesiones de números complejos de soporte finito. Sea* $f : V \to V$ *dada por*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots) = (2x_1, 3x_2, 0, 0, x_3, x_4, x_5, \ldots).$$

Probar que con la estructura inducida por f*,* V *es un* $\mathbb{C}[X]$*-módulo finitamente generado y calcular sus coeficientes de estructura.*

Un ejercicio de teorema de estructura

Ejercicio

Sea $V = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ *el* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial de las sucesiones de números complejos de soporte finito. Sea* $f : V \to V$ *dada por*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots) = (2x_1, 3x_2, 0, 0, x_3, x_4, x_5, \ldots).$$

Probar que con la estructura inducida por f*,* V *es un* $\mathbb{C}[X]$*-módulo finitamente generado y calcular sus coeficientes de estructura.*

La estructura de $\mathbb{C}[X]$-módulo que induce f está dada por $x \cdot v = f(v)$.

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots\}$.

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

$$x \cdot e_1 = f(e_1) = 2e_1$$

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

$$x \cdot e_1 = f(e_1) = 2e_1$$
$$x \cdot e_2 = f(e_2) = 3e_2$$

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

$$x \cdot e_1 = f(e_1) = 2e_1$$
$$x \cdot e_2 = f(e_2) = 3e_2$$
$$x \cdot e_3 = f(e_3) = e_5$$

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

$$\begin{aligned}
x \cdot e_1 &= f(e_1) = 2e_1 \\
x \cdot e_2 &= f(e_2) = 3e_2 \\
x \cdot e_3 &= f(e_3) = e_5 \\
x \cdot e_4 &= f(e_4) = e_6
\end{aligned}$$

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

$$\begin{aligned}
x \cdot e_1 &= f(e_1) = 2e_1 \\
x \cdot e_2 &= f(e_2) = 3e_2 \\
x \cdot e_3 &= f(e_3) = e_5 \\
x \cdot e_4 &= f(e_4) = e_6 \\
x \cdot e_5 &= f(e_5) = e_7
\end{aligned}$$

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

$$x \cdot e_1 = f(e_1) = 2e_1$$
$$x \cdot e_2 = f(e_2) = 3e_2$$
$$x \cdot e_3 = f(e_3) = e_5$$
$$x \cdot e_4 = f(e_4) = e_6$$
$$x \cdot e_5 = f(e_5) = e_7$$
$$x \cdot e_6 = f(e_6) = e_8$$

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

$$
\begin{aligned}
x \cdot e_1 &= f(e_1) = 2e_1 \\
x \cdot e_2 &= f(e_2) = 3e_2 \\
x \cdot e_3 &= f(e_3) = e_5 \\
x \cdot e_4 &= f(e_4) = e_6 \\
x \cdot e_5 &= f(e_5) = e_7 \\
x \cdot e_6 &= f(e_6) = e_8 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

$$\begin{aligned}
x \cdot e_1 &= f(e_1) = 2e_1 \\
x \cdot e_2 &= f(e_2) = 3e_2 \\
x \cdot e_3 &= f(e_3) = e_5 \\
x \cdot e_4 &= f(e_4) = e_6 \\
x \cdot e_5 &= f(e_5) = e_7 \\
x \cdot e_6 &= f(e_6) = e_8 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Por inducción

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \dots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

$$
\begin{aligned}
x \cdot e_1 &= f(e_1) = 2e_1 \\
x \cdot e_2 &= f(e_2) = 3e_2 \\
x \cdot e_3 &= f(e_3) = e_5 \\
x \cdot e_4 &= f(e_4) = e_6 \\
x \cdot e_5 &= f(e_5) = e_7 \\
x \cdot e_6 &= f(e_6) = e_8 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Por inducción

$$x^n \cdot e_3 = e_{2n+3}$$

Solución

Una base de V está dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots\}$.
Tratemos de entender que hace f.

$$
\begin{aligned}
x \cdot e_1 &= f(e_1) = 2e_1 \\
x \cdot e_2 &= f(e_2) = 3e_2 \\
x \cdot e_3 &= f(e_3) = e_5 \\
x \cdot e_4 &= f(e_4) = e_6 \\
x \cdot e_5 &= f(e_5) = e_7 \\
x \cdot e_6 &= f(e_6) = e_8 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Por inducción

$$
\begin{aligned}
x^n \cdot e_3 &= e_{2n+3} \\
x^n \cdot e_4 &= e_{2n+4}.
\end{aligned}
$$

Solución (cont.)

Por lo tanto V está generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (como $\mathbb{C}[X]$-módulo).

Solución (cont.)

Por lo tanto V está generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (como $\mathbb{C}[X]$-módulo). Ahora notemos que

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle.$$

Solución (cont.)

Por lo tanto V está generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (como $\mathbb{C}[X]$-módulo). Ahora notemos que

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle.$$

Cada uno de estos módulos es cíclico. Debemos calcular el anulador de $\langle e_i \rangle$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Solución (cont.)

Por lo tanto V está generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (como $\mathbb{C}[X]$-módulo).
Ahora notemos que

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle.$$

Cada uno de estos módulos es cíclico. Debemos calcular el anulador de $\langle e_i \rangle$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
Tenemos sucesiones exactas

Solución (cont.)

Por lo tanto V está generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (como $\mathbb{C}[X]$-módulo).
Ahora notemos que

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle.$$

Cada uno de estos módulos es cíclico. Debemos calcular el anulador de $\langle e_i \rangle$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
Tenemos sucesiones exactas

$$0 \to \langle X - 2 \rangle \to \mathbb{C}[X] \to \langle e_1 \rangle \to 0$$

Solución (cont.)

Por lo tanto V está generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (como $\mathbb{C}[X]$-módulo).
Ahora notemos que

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle.$$

Cada uno de estos módulos es cíclico. Debemos calcular el anulador de $\langle e_i \rangle$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
Tenemos sucesiones exactas

$$0 \to \langle X - 2 \rangle \to \mathbb{C}[X] \to \langle e_1 \rangle \to 0$$
$$0 \to \langle X - 3 \rangle \to \mathbb{C}[X] \to \langle e_2 \rangle \to 0$$

Solución (cont.)

Por lo tanto V está generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (como $\mathbb{C}[X]$-módulo). Ahora notemos que

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle.$$

Cada uno de estos módulos es cíclico. Debemos calcular el anulador de $\langle e_i \rangle$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
Tenemos sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 \to \langle X - 2 \rangle \to & \mathbb{C}[X] \to \langle e_1 \rangle \to 0 \\ 0 \to \langle X - 3 \rangle \to & \mathbb{C}[X] \to \langle e_2 \rangle \to 0 \\ 0 \to & \mathbb{C}[X] \to \langle e_3 \rangle \to 0 \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Por lo tanto V está generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (como $\mathbb{C}[X]$-módulo).
Ahora notemos que

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle \oplus \langle e_4 \rangle.$$

Cada uno de estos módulos es cíclico. Debemos calcular el anulador de $\langle e_i \rangle$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
Tenemos sucesiones exactas

$$\begin{aligned}
0 \to \langle X - 2 \rangle \to \mathbb{C}[X] &\to \langle e_1 \rangle \to 0 \\
0 \to \langle X - 3 \rangle \to \mathbb{C}[X] &\to \langle e_2 \rangle \to 0 \\
0 \to \mathbb{C}[X] &\to \langle e_3 \rangle \to 0 \\
0 \to \mathbb{C}[X] &\to \langle e_4 \rangle \to 0
\end{aligned}$$

Solución (cont.)

Luego

Solución (cont.)

Luego

$$V \simeq \mathbb{C}[X]/\langle X-2\rangle \oplus \mathbb{C}[X]/\langle X-3\rangle \oplus \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]$$

Solución (cont.)

Luego

$$\begin{aligned} V &\simeq \mathbb{C}[X]/\langle X-2\rangle \oplus \mathbb{C}[X]/\langle X-3\rangle \oplus \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X] \\ &\simeq \mathbb{C}[X]/\langle (x-2)(x-3)\rangle \oplus \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]. \end{aligned}$$

Solución (cont.)

Luego

$$\begin{aligned} V &\simeq \mathbb{C}[X]/\langle X-2\rangle \oplus \mathbb{C}[X]/\langle X-3\rangle \oplus \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X] \\ &\simeq \mathbb{C}[X]/\langle (x-2)(x-3)\rangle \oplus \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}[X]. \end{aligned}$$

Por lo tanto los factores invariantes son $(x-2)(x-3)$, 0 y 0.