

Álgebra II Práctica (clase 24)

Iván Sadofski Costa

Universidad de Buenos Aires

21 de Julio de 2020

Teorema

Sean R un DIP y $A \in R^{m \times n}$. Sea $r = \min(m, n)$. Entonces existen $P \in \text{GL}_m(R)$, $Q \in \text{GL}_n(R)$ tales que $PAQ = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$ y $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_r$. Más aún (salvo asociados) los d_i están determinados por A .

Forma normal de Smith

Teorema

Sean R un DIP y $A \in R^{m \times n}$. Sea $r = \min(m, n)$. Entonces existen $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$ tales que $PAQ = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$ y $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_r$. Más aún (salvo asociados) los d_i están determinados por A .

Hay un algoritmo para calcular la forma normal de Smith.

Forma normal de Smith

Teorema

Sean R un DIP y $A \in R^{m \times n}$. Sea $r = \min(m, n)$. Entonces existen $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$ tales que $PAQ = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$ y $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_r$. Más aún (salvo asociados) los d_i están determinados por A .

Hay un algoritmo para calcular la forma normal de Smith.

El algoritmo involucra escribir al máximo común divisor de $a, b \in R$ como combinación lineal de a y b .

Forma normal de Smith

Teorema

Sean R un DIP y $A \in R^{m \times n}$. Sea $r = \min(m, n)$. Entonces existen $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$ tales que $PAQ = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$ y $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_r$. Más aún (salvo asociados) los d_i están determinados por A .

Hay un algoritmo para calcular la forma normal de Smith.

El algoritmo involucra escribir al máximo común divisor de $a, b \in R$ como combinación lineal de a y b .

Por este motivo y para simplificar veremos como hacer las cuentas en un dominio euclídeo (asumiendo solamente que sabemos calcular cociente y resto).

Forma normal de Smith

Teorema

Sean R un DIP y $A \in R^{m \times n}$. Sea $r = \min(m, n)$. Entonces existen $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$ tales que $PAQ = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$ y $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_r$. Más aún (salvo asociados) los d_i están determinados por A .

Hay un algoritmo para calcular la forma normal de Smith.

El algoritmo involucra escribir al máximo común divisor de $a, b \in R$ como combinación lineal de a y b .

Por este motivo y para simplificar veremos como hacer las cuentas en un dominio euclídeo (asumiendo solamente que sabemos calcular cociente y resto).

El algoritmo general está explicado en la teoría (Teorema 4.34).

Forma normal de Smith para dominios euclídeos.

El algoritmo que veremos tiene dos pasos

- Hacer que la matriz sea diagonal.
- Lograr que cada entrada de la diagonal divida a la siguiente.

Haciendo que la matriz sea diagonal

Hacemos r pasos. En el k -ésimo paso empezamos con una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k-1} & & & \\ \hline & & & & & 0 & & \\ & & & & & & a_{k,k} & \cdots & a_{k,n} \\ & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & a_{n,k} & \cdots & a_{m,n} \end{array} \right)$$

Haciendo que la matriz sea diagonal

Hacemos r pasos. En el k -ésimo paso empezamos con una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k-1} & & & \\ \hline & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right)$$

Nos concentramos en el bloque de abajo a la derecha. Solamente haremos operaciones que no afectarán el resto de la matriz.

Haciendo que la matriz sea diagonal

Hacemos r pasos. En el k -ésimo paso empezamos con una matriz de la forma

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{k-1} & & & \\ \hline & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right)$$

Nos concentramos en el bloque de abajo a la derecha. Solamente haremos operaciones que no afectarán el resto de la matriz. Las operaciones que haremos son:

- Intercambiar dos filas (resp. columnas).
- Sumar a una fila (resp. columna) un múltiplo de otra fila (resp. columna).

Haciendo que la matriz sea diagonal (cont.)

Nos enfocamos en la submatriz dada por las filas de índice $k \leq i \leq m$ y las columnas de índice $k \leq j \leq n$.

Haciendo que la matriz sea diagonal (cont.)

Nos enfocamos en la submatriz dada por las filas de índice $k \leq i \leq m$ y las columnas de índice $k \leq j \leq n$.

Si todas las entradas en la fila k y la columna k son 0 el paso k está completo y pasamos al paso $k + 1$.

Haciendo que la matriz sea diagonal (cont.)

Nos enfocamos en la submatriz dada por las filas de índice $k \leq i \leq m$ y las columnas de índice $k \leq j \leq n$.

Si todas las entradas en la fila k y la columna k son 0 el paso k está completo y pasamos al paso $k + 1$.

Si no, intercambiando filas o columnas podemos suponer que $a_{k,k} \neq 0$.

Haciendo que la matriz sea diagonal (cont.)

Nos enfocamos en la submatriz dada por las filas de índice $k \leq i \leq m$ y las columnas de índice $k \leq j \leq n$.

Si todas las entradas en la fila k y la columna k son 0 el paso k está completo y pasamos al paso $k + 1$.

Si no, intercambiando filas o columnas podemos suponer que $a_{k,k} \neq 0$.

(★) Restamos a cada fila un múltiplo adecuado de la fila k para que en el lugar (i, k) quede el resto de $a_{i,k}$ en la división por $a_{k,k}$.

Haciendo que la matriz sea diagonal (cont.)

Nos enfocamos en la submatriz dada por las filas de índice $k \leq i \leq m$ y las columnas de índice $k \leq j \leq n$.

Si todas las entradas en la fila k y la columna k son 0 el paso k está completo y pasamos al paso $k + 1$.

Si no, intercambiando filas o columnas podemos suponer que $a_{k,k} \neq 0$.

(★) Restamos a cada fila un múltiplo adecuado de la fila k para que en el lugar (i, k) quede el resto de $a_{i,k}$ en la división por $a_{k,k}$. Luego restamos a cada columna un múltiplo adecuado de la columna k para que en el lugar k, j quede el resto de $a_{k,j}$ en la división por $a_{k,k}$ (acá calculamos cociente y resto)

Haciendo que la matriz sea diagonal (cont.)

Nos enfocamos en la submatriz dada por las filas de índice $k \leq i \leq m$ y las columnas de índice $k \leq j \leq n$.

Si todas las entradas en la fila k y la columna k son 0 el paso k está completo y pasamos al paso $k + 1$.

Si no, intercambiando filas o columnas podemos suponer que $a_{k,k} \neq 0$.

(★) Restamos a cada fila un múltiplo adecuado de la fila k para que en el lugar (i, k) quede el resto de $a_{i,k}$ en la división por $a_{k,k}$. Luego restamos a cada columna un múltiplo adecuado de la columna k para que en el lugar k, j quede el resto de $a_{k,j}$ en la división por $a_{k,k}$ (acá calculamos cociente y resto)

Si el k -ésimo paso no está completo o bien (i) hay un i tal que $a_{i,k} \neq 0$ y entonces intercambiamos las filas i y k (ii) hay un j tal que $a_{k,j} \neq 0$ y entonces intercambiamos las columnas j y k .

Haciendo que la matriz sea diagonal (cont.)

Nos enfocamos en la submatriz dada por las filas de índice $k \leq i \leq m$ y las columnas de índice $k \leq j \leq n$.

Si todas las entradas en la fila k y la columna k son 0 el paso k está completo y pasamos al paso $k + 1$.

Si no, intercambiando filas o columnas podemos suponer que $a_{k,k} \neq 0$.

(★) Restamos a cada fila un múltiplo adecuado de la fila k para que en el lugar (i, k) quede el resto de $a_{i,k}$ en la división por $a_{k,k}$. Luego restamos a cada columna un múltiplo adecuado de la columna k para que en el lugar k, j quede el resto de $a_{k,j}$ en la división por $a_{k,k}$ (acá calculamos cociente y resto)

Si el k -ésimo paso no está completo o bien (i) hay un i tal que $a_{i,k} \neq 0$ y entonces intercambiamos las filas i y k (ii) hay un j tal que $a_{k,j} \neq 0$ y entonces intercambiamos las columnas j y k .

Volvemos al paso (★)

Haciendo que la matriz sea diagonal (cont.)

Nos enfocamos en la submatriz dada por las filas de índice $k \leq i \leq m$ y las columnas de índice $k \leq j \leq n$.

Si todas las entradas en la fila k y la columna k son 0 el paso k está completo y pasamos al paso $k + 1$.

Si no, intercambiando filas o columnas podemos suponer que $a_{k,k} \neq 0$.

(★) Restamos a cada fila un múltiplo adecuado de la fila k para que en el lugar (i, k) quede el resto de $a_{i,k}$ en la división por $a_{k,k}$. Luego restamos a cada columna un múltiplo adecuado de la columna k para que en el lugar k, j quede el resto de $a_{k,j}$ en la división por $a_{k,k}$ (acá calculamos cociente y resto)

Si el k -ésimo paso no está completo o bien (i) hay un i tal que $a_{i,k} \neq 0$ y entonces intercambiamos las filas i y k (ii) hay un j tal que $a_{k,j} \neq 0$ y entonces intercambiamos las columnas j y k .

Volvemos al paso (★) (por algoritmo de Euclides en algún momento el k -ésimo estará completo)

Llevando a forma normal de Smith

Empezamos con una matriz diagonal con entradas $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Llevando a forma normal de Smith

Empezamos con una matriz diagonal con entradas $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Al comenzar el i -ésimo paso tenemos una matriz diagonal tal que

- $\alpha_t \mid \alpha_{t+1}$ para cada $t < i - 1$
- $\alpha_{i-1} \mid \alpha_t$ para cada $t \geq i$.

Llevando a forma normal de Smith

Empezamos con una matriz diagonal con entradas $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Al comenzar el i -ésimo paso tenemos una matriz diagonal tal que

- $\alpha_t \mid \alpha_{t+1}$ para cada $t < i - 1$
- $\alpha_{i-1} \mid \alpha_t$ para cada $t \geq i$.

Como antes haremos operaciones de fila y columna a partir del lugar i para no modificar el resto de la matriz.

Llevando a forma normal de Smith

Empezamos con una matriz diagonal con entradas $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Al comenzar el i -ésimo paso tenemos una matriz diagonal tal que

- $\alpha_t \mid \alpha_{t+1}$ para cada $t < i - 1$
- $\alpha_{i-1} \mid \alpha_t$ para cada $t \geq i$.

Como antes haremos operaciones de fila y columna a partir del lugar i para no modificar el resto de la matriz.

Para cada $t > i$ hacemos operaciones de fila y columna para reemplazar α_i por $\text{mcd}(\alpha_i, \alpha_t)$ y α_t por $\text{mcm}(\alpha_i, \alpha_t)$. Luego de hacer esto el i -ésimo paso estará completo.

Llevando a forma normal de Smith

Empezamos con una matriz diagonal con entradas $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Al comenzar el i -ésimo paso tenemos una matriz diagonal tal que

- $\alpha_t \mid \alpha_{t+1}$ para cada $t < i - 1$
- $\alpha_{i-1} \mid \alpha_i$ para cada $t \geq i$.

Como antes haremos operaciones de fila y columna a partir del lugar i para no modificar el resto de la matriz.

Para cada $t > i$ hacemos operaciones de fila y columna para reemplazar α_i por $\text{mcd}(\alpha_i, \alpha_t)$ y α_t por $\text{mcm}(\alpha_i, \alpha_t)$. Luego de hacer esto el i -ésimo paso estará completo.

Para hacer este reemplazo nos enfocamos en la submatriz $\begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & \alpha_t \end{pmatrix}$ y utilizamos el algoritmo de Euclides para lograr que una de las entradas sea el máximo común divisor.

Llevando a forma normal de Smith

Empezamos con una matriz diagonal con entradas $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

Al comenzar el i -ésimo paso tenemos una matriz diagonal tal que

- $\alpha_t \mid \alpha_{t+1}$ para cada $t < i - 1$
- $\alpha_{i-1} \mid \alpha_i$ para cada $t \geq i$.

Como antes haremos operaciones de fila y columna a partir del lugar i para no modificar el resto de la matriz.

Para cada $t > i$ hacemos operaciones de fila y columna para reemplazar α_i por $\text{mcd}(\alpha_i, \alpha_t)$ y α_t por $\text{mcm}(\alpha_i, \alpha_t)$. Luego de hacer esto el i -ésimo paso estará completo.

Para hacer este reemplazo nos enfocamos en la submatriz $\begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ 0 & \alpha_t \end{pmatrix}$ y utilizamos el algoritmo de Euclides para lograr que una de las entradas sea el máximo común divisor. Luego con algunas operaciones de fila logramos que esta submatriz sea diagonal y la otra entrada será el mínimo común múltiplo de los números originales.

Como siempre, las operaciones de fila que vamos haciendo permiten hallar las matrices P y Q .

Como siempre, las operaciones de fila que vamos haciendo permiten hallar las matrices P y Q .

Ejercicio 1: Una buena forma de entender el algoritmo es implementarlo. Para $R = \mathbb{Z}$ se puede usar cualquier lenguaje!

Como siempre, las operaciones de fila que vamos haciendo permiten hallar las matrices P y Q .

Ejercicio 1: Una buena forma de entender el algoritmo es implementarlo. Para $R = \mathbb{Z}$ se puede usar cualquier lenguaje!

Ejercicio 2: Algunos pasos se pueden hacer con menos operaciones. Pensar cómo.

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo sobre $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 12 & 8 \\ 0 & 14 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 20 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 20 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En este caso no hizo falta la segunda parte.

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$

$$\begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ x^2 + 1 & x + 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$

$$\begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ x^2 + 1 & x + 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ 0 & 2 & -2x \\ 0 & x & x \end{pmatrix}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$

$$\begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ x^2 + 1 & x + 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ 0 & 2 & -2x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ 2 & 0 & -2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ x^2 + 1 & x + 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ 0 & 2 & -2x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ 2 & 0 & -2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2x \\ x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ x^2 + 1 & x + 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ 0 & 2 & -2x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ 2 & 0 & -2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2x \\ x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ x - 1 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ x & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ x^2 + 1 & x + 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ 0 & 2 & -2x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ 2 & 0 & -2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2x \\ x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ x - 1 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ x & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x - 1 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ x & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ x^2 + 1 & x + 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ 0 & 2 & -2x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ 2 & 0 & -2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2x \\ x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ x - 1 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ x & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x - 1 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ x & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ x^2 + 1 & x + 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ 0 & 2 & -2x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ 2 & 0 & -2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2x \\ x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ x - 1 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ x & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x - 1 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ x & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ x^2 + 1 & x + 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x - 1 & 2x \\ 0 & 2 & -2x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ 2 & 0 & -2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2x \\ x - 1 & x^2 + 1 & 2x \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ x - 1 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ x & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x - 1 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ x & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La cuenta no terminó, porque $x^2 + 1 \nmid x^2 + x$!

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$ (cont.)

Segunda parte de la cuenta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$ (cont.)

Segunda parte de la cuenta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$ (cont.)

Segunda parte de la cuenta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x - 1 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$ (cont.)

Segunda parte de la cuenta:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x - 1 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x - 1 \\ 0 & -(x + 1)(x^2 + x) & x^2 + x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$ (cont.)

Segunda parte de la cuenta:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x - 1 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x - 1 \\ 0 & -(x + 1)(x^2 + x) & x^2 + x \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -(x + 1)(x^2 + x) & x^2 + x + \frac{(x-1)(x+1)(x^2+x)}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$ (cont.)

Segunda parte de la cuenta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x - 1 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x - 1 \\ 0 & -(x + 1)(x^2 + x) & x^2 + x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -(x + 1)(x^2 + x) & x^2 + x + \frac{(x-1)(x+1)(x^2+x)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x + \frac{(x-1)(x+1)(x^2+x)}{2} \end{pmatrix}$$

Un ejemplo con $R = \mathbb{R}[x]$ (cont.)

Segunda parte de la cuenta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x^2 + x \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + 1 & x - 1 \\ 0 & 0 & x^2 + x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x - 1 \\ 0 & -(x + 1)(x^2 + x) & x^2 + x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -(x + 1)(x^2 + x) & x^2 + x + \frac{(x-1)(x+1)(x^2+x)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + x + \frac{(x-1)(x+1)(x^2+x)}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x^2 + 1)(x^2 + x) \end{pmatrix}$$

Sea

$$S = \langle (x^2 + 1, x - 1, 2x), (x^2 + 1, x + 1, 0), (0, x, x) \rangle \subseteq \mathbb{R}[x]^3.$$

Sea

$$S = \langle (x^2 + 1, x - 1, 2x), (x^2 + 1, x + 1, 0), (0, x, x) \rangle \subseteq \mathbb{R}[x]^3.$$

Queremos calcular $\mathbb{R}[x]^3/S$.

Sea

$$S = \langle (x^2 + 1, x - 1, 2x), (x^2 + 1, x + 1, 0), (0, x, x) \rangle \subseteq \mathbb{R}[x]^3.$$

Queremos calcular $\mathbb{R}[x]^3/S$.

Por la cuenta anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[x]^3/S &\simeq \mathbb{R}[x]/\langle 1 \rangle \oplus \mathbb{R}[x]/\langle 1 \rangle \oplus \mathbb{R}[x]/\langle (x^2 + 1)(x^2 + x) \rangle \\ &\simeq \mathbb{R}[x]/\langle (x^2 + 1)(x^2 + x) \rangle.\end{aligned}$$

Sea

$$S = \langle (x^2 + 1, x - 1, 2x), (x^2 + 1, x + 1, 0), (0, x, x) \rangle \subseteq \mathbb{R}[x]^3.$$

Queremos calcular $\mathbb{R}[x]^3/S$.

Por la cuenta anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[x]^3/S &\simeq \mathbb{R}[x]/\langle 1 \rangle \oplus \mathbb{R}[x]/\langle 1 \rangle \oplus \mathbb{R}[x]/\langle (x^2 + 1)(x^2 + x) \rangle \\ &\simeq \mathbb{R}[x]/\langle (x^2 + 1)(x^2 + x) \rangle.\end{aligned}$$

(usamos que si $W_i \subseteq V_i$ se tiene $(\bigoplus_i V_i)/(\bigoplus_i W_i) = \bigoplus_i V_i/W_i$)