Álgebra II Práctica (clase 16)

Iván Sadofschi Costa

Universidad de Buenos Aires

19 de Junio de 2020

Prerrequisitos

Para leer estas diapositivas se recomienda haber leído el apunte teórico hasta 3.9.

El Lema de Schur

Lema

Sean M, N dos R-módulos y $f : M \to N$ un morfismo. Entonces
(i) Si M es simple entonces f es inyectivo o 0.
(ii) Si N es simple entonces f es sobreyectivo o 0.

El Lema de Schur

Lema

Sean M, N dos R-módulos y $f : M \to N$ un morfismo. Entonces
(i) Si M es simple entonces f es inyectivo o 0.
(ii) Si N es simple entonces f es sobreyectivo o 0.

Lema

Sean M y N dos módulos simples y $f : M \to N$ un morfismo. Entonces f es 0 o un isomorfismo.

El Lema de Schur

Lema

Sean M, N dos R-módulos y $f : M \to N$ un morfismo. Entonces
(i) Si M es simple entonces f es inyectivo o 0.
(ii) Si N es simple entonces f es sobreyectivo o 0.

Lema

Sean M y N dos módulos simples y $f : M \to N$ un morfismo. Entonces f es 0 o un isomorfismo.

Si M es simple entonces $\mathrm{End}_R(M)$ es un anillo de división.

Módulos semisimples

Un R-módulo semisimple es un R-módulo isomorfo a una suma directa de R-módulos simples.

Módulos semisimples

Un R-módulo semisimple es un R-módulo isomorfo a una suma directa de R-módulos simples.

Lema

Sean I,J finitos. Entonces

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \bigoplus_{j\in J} N_j\right) \simeq \bigoplus \mathrm{Hom}(M_i, N_j)$$

.

Módulos semisimples

Un R-módulo semisimple es un R-módulo isomorfo a una suma directa de R-módulos simples.

Lema

Sean I,J finitos. Entonces

$$\operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \bigoplus_{j\in J} N_j\right) \simeq \bigoplus \operatorname{Hom}(M_i, N_j)$$

.

Proposición

Sean $M_1, \ldots, M_k$ simples distintos (no isomorfos) dos a dos. Entonces hay un isomorfismo de anillos

$$\operatorname{End}_R(\bigoplus M_i^{n_i}) \simeq \prod M_{n_i}(D_i)$$

donde $D_i = \operatorname{End}_R(M_i)$.

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

También podemos considerar el $\mathbb{R}[S_3]$ módulo $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{A_3}$ (que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), con la acción dada por $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$.

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

También podemos considerar el $\mathbb{R}[S_3]$ módulo $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{A_3}$ (que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), con la acción dada por $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$.

¿Serán M y $\widetilde{M}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

También podemos considerar el $\mathbb{R}[S_3]$ módulo $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{A_3}$ (que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), con la acción dada por $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$.

¿Serán M y $\widetilde{M}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Vimos que M es suma directa de dos submódulos (el subespacio V generado por $(1, 1, 1)$ y su complemento ortogonal W).

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

También podemos considerar el $\mathbb{R}[S_3]$ módulo $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{A_3}$ (que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), con la acción dada por $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$.

¿Serán M y $\widetilde{M}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Vimos que M es suma directa de dos submódulos (el subespacio V generado por $(1,1,1)$ y su complemento ortogonal W). Estos sumandos son simples.

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

También podemos considerar el $\mathbb{R}[S_3]$ módulo $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{A_3}$ (que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), con la acción dada por $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$.

¿Serán M y $\widetilde{M}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Vimos que M es suma directa de dos submódulos (el subespacio V generado por $(1, 1, 1)$ y su complemento ortogonal W). Estos sumandos son simples.

Sea e_1, $e_{(1,2,3)}$, $e_{(1,3,2)}$ la base de $\widetilde{M}$. Tenemos que $\widetilde{V} = \langle e_1 \rangle$ y $\widetilde{W} = \langle e_{(1,2,3)}, e_{(1,3,2)} \rangle$ son submódulos.

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

También podemos considerar el $\mathbb{R}[S_3]$ módulo $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{A_3}$ (que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), con la acción dada por $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$.

¿Serán M y $\widetilde{M}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Vimos que M es suma directa de dos submódulos (el subespacio V generado por $(1,1,1)$ y su complemento ortogonal W). Estos sumandos son simples.

Sea e_1, $e_{(1,2,3)}$, $e_{(1,3,2)}$ la base de $\widetilde{M}$. Tenemos que $\widetilde{V} = \langle e_1 \rangle$ y $\widetilde{W} = \langle e_{(1,2,3)}, e_{(1,3,2)} \rangle$ son submódulos.

¿Vale que $V \simeq \widetilde{V}$?

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

También podemos considerar el $\mathbb{R}[S_3]$ módulo $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{A_3}$ (que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), con la acción dada por $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$.

¿Serán M y $\widetilde{M}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Vimos que M es suma directa de dos submódulos (el subespacio V generado por $(1,1,1)$ y su complemento ortogonal W). Estos sumandos son simples.

Sea e_1, $e_{(1,2,3)}$, $e_{(1,3,2)}$ la base de $\widetilde{M}$. Tenemos que $\widetilde{V} = \langle e_1 \rangle$ y $\widetilde{W} = \langle e_{(1,2,3)}, e_{(1,3,2)} \rangle$ son submódulos.

¿Vale que $V \simeq \widetilde{V}$? Sí, la acción es trivial en ambos casos.

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

También podemos considerar el $\mathbb{R}[S_3]$ módulo $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{A_3}$ (que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), con la acción dada por $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$.

¿Serán M y $\widetilde{M}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Vimos que M es suma directa de dos submódulos (el subespacio V generado por $(1, 1, 1)$ y su complemento ortogonal W). Estos sumandos son simples.

Sea e_1, $e_{(1,2,3)}$, $e_{(1,3,2)}$ la base de $\widetilde{M}$. Tenemos que $\widetilde{V} = \langle e_1 \rangle$ y $\widetilde{W} = \langle e_{(1,2,3)}, e_{(1,3,2)} \rangle$ son submódulos.

¿Vale que $V \simeq \widetilde{V}$? Sí, la acción es trivial en ambos casos.

¿Son W y $\widetilde{W}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

También podemos considerar el $\mathbb{R}[S_3]$ módulo $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{A_3}$ (que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), con la acción dada por $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$.

¿Serán M y $\widetilde{M}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Vimos que M es suma directa de dos submódulos (el subespacio V generado por $(1,1,1)$ y su complemento ortogonal W). Estos sumandos son simples.

Sea e_1, $e_{(1,2,3)}$, $e_{(1,3,2)}$ la base de $\widetilde{M}$. Tenemos que $\widetilde{V} = \langle e_1 \rangle$ y $\widetilde{W} = \langle e_{(1,2,3)}, e_{(1,3,2)} \rangle$ son submódulos.

¿Vale que $V \simeq \widetilde{V}$? Sí, la acción es trivial en ambos casos.

¿Son W y $\widetilde{W}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Parece que no. ¿Cómo lo podemos probar?

Más sobre kG-módulos

Vimos ya que podemos dar a $\mathbb{R}^3$ una estructura de $\mathbb{R}[S_3]$-módulo vía permutar las coordenadas. Llamamos M a este módulo.

También podemos considerar el $\mathbb{R}[S_3]$ módulo $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{A_3}$ (que es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), con la acción dada por $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$.

¿Serán M y $\widetilde{M}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Vimos que M es suma directa de dos submódulos (el subespacio V generado por $(1,1,1)$ y su complemento ortogonal W). Estos sumandos son simples.

Sea e_1, $e_{(1,2,3)}$, $e_{(1,3,2)}$ la base de $\widetilde{M}$. Tenemos que $\widetilde{V} = \langle e_1 \rangle$ y $\widetilde{W} = \langle e_{(1,2,3)}, e_{(1,3,2)} \rangle$ son submódulos.

¿Vale que $V \simeq \widetilde{V}$? Sí, la acción es trivial en ambos casos.

¿Son W y $\widetilde{W}$ isomorfos como $\mathbb{R}[S_3]$-módulos?

Parece que no. ¿Cómo lo podemos probar?

Tenemos $W^{A_3} = 0$ y $\widetilde{W}^{A_3} = \widetilde{W}$. Luego los módulos no son isomorfos.

El módulo $\widetilde{W}$

¿Es $\widetilde{W}$ simple?

El módulo $\widetilde{W}$

¿Es $\widetilde{W}$ simple? No, $\langle e_{(1,2,3)} + e_{(1,3,2)} \rangle$ y $\langle e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)} \rangle$ son submódulos.

El módulo $\widetilde{W}$

¿Es $\widetilde{W}$ simple? No, $\langle e_{(1,2,3)} + e_{(1,3,2)} \rangle$ y $\langle e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)} \rangle$ son submódulos.

El primero es isomorfo a V El segundo, llamémoslo S, no resulta isomorfo a V. Por qué?

El módulo $\widetilde{W}$

¿Es $\widetilde{W}$ simple? No, $\langle e_{(1,2,3)} + e_{(1,3,2)} \rangle$ y $\langle e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)} \rangle$ son submódulos.

El primero es isomorfo a V El segundo, llamémoslo S, no resulta isomorfo a V. Por qué?

En resumen, $M = V \oplus W$ y $\widetilde{M} = V \oplus V \oplus S$.

El módulo $\widetilde{W}$

¿Es $\widetilde{W}$ simple? No, $\langle e_{(1,2,3)} + e_{(1,3,2)} \rangle$ y $\langle e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)} \rangle$ son submódulos.

El primero es isomorfo a V El segundo, llamémoslo S, no resulta isomorfo a V. Por qué?

En resumen, $M = V \oplus W$ y $\widetilde{M} = V \oplus V \oplus S$.

Por lo tanto M y $\widetilde{M}$ NO son isomorfos.