Álgebra II Práctica (clase 15)

Guido Arnone

Universidad de Buenos Aires

16 de Junio de 2020

Prerrequisitos

Para leer estas diapositivas se recomienda haber leído el apunte teórico hasta la Sección 3.11.

Más sobre exactitud

Como vimos en la clase anterior, los módulos proyectivos e inyectivos cumplen buenas propiedades con respecto a la exactitud.

Observamos también que los módulos libres son proyectivos, y que un módulo proyectivo es sumando directo de un módulo libre. Siguiendo esta idea, varias propiedades que satisfacen los módulos libres se cumplen también para los módulos proyectivos.

Más sobre exactitud

Como vimos en la clase anterior, los módulos proyectivos e inyectivos cumplen buenas propiedades con respecto a la exactitud.

Observamos también que los módulos libres son proyectivos, y que un módulo proyectivo es sumando directo de un módulo libre. Siguiendo esta idea, varias propiedades que satisfacen los módulos libres se cumplen también para los módulos proyectivos.

En la práctica 6 hay varios ejercicios que relacionan los módulos proyectivos e inyectivos con la exactitud. Para tener un poco más de motivación sobre estos temas, veamos primero algunas definiciones.

Complejos de Cadenas

Un complejo de cadenas de A-módulos $(M_\bullet, d_\bullet)$ es una familia $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A-módulos junto con aplicaciones A-lineales $d_n : M_n \to M_{n-1}$ tales que $d_n d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \to \cdots$$

Complejos de Cadenas

Un complejo de cadenas de A-módulos $(M_\bullet, d_\bullet)$ es una familia $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A-módulos junto con aplicaciones A-lineales $d_n : M_n \to M_{n-1}$ tales que $d_n d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \to \cdots$$

Observemos que la ecuación $d_n d_{n+1} = 0$ nos dice exactamente que $\operatorname{im} d_{n+1} \subset \ker d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, la sucesión cumple una condición necesaria pasar ser exacta, y nos interesará saber cuando efectivamente lo es.

Complejos de Cadenas

Un complejo de cadenas de A-módulos $(M_\bullet, d_\bullet)$ es una familia $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A-módulos junto con aplicaciones A-lineales $d_n : M_n \to M_{n-1}$ tales que $d_n d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \to \cdots$$

Observemos que la ecuación $d_n d_{n+1} = 0$ nos dice exactamente que $\operatorname{im} d_{n+1} \subset \ker d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, la sucesión cumple una condición necesaria pasar ser exacta, y nos interesará saber cuando efectivamente lo es.

Con la intención de alivianar la notación, solemos notar d a cualquiera de los morfismos d_n cuando su dominio se sobreentienda del contexto. También se suele escribir $d^2 = 0$ para la condición de la definición.

Complejos de Cadenas - Ejemplos

- Si M es un A-módulo, podemos verlo como un complejo donde $M_0 = M$, $M_n = 0$ para $n \neq 0$ y $d_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\cdots 0 \to 0 \to M \to 0 \to 0 \to \cdots$$

Complejos de Cadenas - Ejemplos

- Si M es un A-módulo, podemos verlo como un complejo donde $M_0 = M$, $M_n = 0$ para $n \neq 0$ y $d_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\cdots 0 \to 0 \to M \to 0 \to 0 \to \cdots$$

- El siguiente es un complejo de $\mathbb{Z}_6$-módulos,

$$\cdots \to \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{2\cdot -} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{3\cdot -} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{2\cdot -} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{3\cdot -} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{2\cdot -} \mathbb{Z}_6 \to \cdots$$

Complejos de Cadenas - Ejemplos

- Si M es un A-módulo, podemos verlo como un complejo donde $M_0 = M$, $M_n = 0$ para $n \neq 0$ y $d_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\cdots 0 \to 0 \to M \to 0 \to 0 \to \cdots$$

- El siguiente es un complejo de $\mathbb{Z}_6$-módulos,

$$\cdots \to \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{2\cdot -} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{3\cdot -} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{2\cdot -} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{3\cdot -} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{2\cdot -} \mathbb{Z}_6 \to \cdots$$

- Si I es un ideal bilátero de un anillo A, entonces

$$0 \to I \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/I \to 0$$

es un complejo de A-módulos.

Homología

Fijemos ahora un complejo de A-módulos $C = (M_\bullet, d_\bullet)$. Este será exacto si $\operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Homología

Fijemos ahora un complejo de A-módulos $C = (M_\bullet, d_\bullet)$. Este será exacto si $\operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ya sabemos que $\operatorname{im} d_{n+1} \subset \ker d_n$, así que esto es lo mismo que preguntarse si $\ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Homología

Fijemos ahora un complejo de A-módulos $C = (M_\bullet, d_\bullet)$. Este será exacto si $\operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ya sabemos que $\operatorname{im} d_{n+1} \subset \ker d_n$, así que esto es lo mismo que preguntarse si $\ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La homología de C en el lugar k es el A-módulo

$$H_k(C) := \frac{\ker d_k}{\operatorname{im} d_{k+1}}.$$

En estos términos, un complejo es exacto si tiene homología cero.

Homología

Fijemos ahora un complejo de A-módulos $C = (M_\bullet, d_\bullet)$. Este será exacto si $\text{im } d_{n+1} = \ker d_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ya sabemos que $\text{im } d_{n+1} \subset \ker d_n$, así que esto es lo mismo que preguntarse si $\ker d_n / \text{im } d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La homología de C en el lugar k es el A-módulo

$$H_k(C) := \frac{\ker d_k}{\text{im } d_{k+1}}.$$

En estos términos, un complejo es exacto si tiene homología cero.

Si vemos a un A-módulo M como un complejo con M en el lugar 0, su homología es $H_0(M) = M$ y $H_k(M) = 0$ si $k \neq 0$. Pueden verificar que otros dos ejemplos de complejos eran exactos.

Resoluciones Proyectivas

Resolveremos ahora el ejercicio 9 de la práctica 6. Los primeros incisos nos piden lo siguiente:

Ejercicio (práctica 6, ej. 9, ítems a y b)

Sea A un anillo. Probar las siguientes afirmaciones.

a) *Para cada A-módulo M existe un diagrama*

$$\cdots \to P_{p+1} \xrightarrow{d^p} P_p \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d^0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

de A-módulos y morfismos de A-módulos que es exacto, y en el que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ el módulo P_p es proyectivo. El morfismo ε se llama aumentación y el diagrama obtenido al reemplazar ε por 0 es llamado resolución proyectiva de M.

b) *Los A-módulos P_p pueden elegirse libres para todo $p \in \mathbb{N}_0$.*

Intuitivamente, queremos aproximar a M con módulos proyectivos *como complejos*.

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Usaremos el siguiente resultado,

Observación

Si M es un A-módulo, existen L un A-módulo libre y $f : L \to M$ un epimorfismo.

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Usaremos el siguiente resultado,

Observación

Si M es un A-módulo, existen L un A-módulo libre y $f : L \to M$ un epimorfismo.

Esto nos dá el comienzo de la resolución: si M es un A-módulo, usamos la observación para definir el morfismo de aumentación

$$P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0.$$

Si ε fuera un isomorfismo, entonces $0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ es exacta y terminamos. ¿Cómo seguimos si no?

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Usaremos el siguiente resultado,

Observación

Si M es un A-módulo, existen L un A-módulo libre y $f : L \to M$ un epimorfismo.

Esto nos dá el comienzo de la resolución: si M es un A-módulo, usamos la observación para definir el morfismo de aumentación

$$P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0.$$

Si ε fuera un isomorfismo, entonces $0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ es exacta y terminamos. ¿Cómo seguimos si no? Seguro tenemos una sucesión exacta de la forma

$$0 \to \ker \varepsilon \hookrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0,$$

pero $\ker \varepsilon$ no tiene por qué ser proyectivo.

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Como antes, lo que es seguro es que podemos conseguir un epimorfismo $g_1 : P_1 \to \ker \varepsilon$, que al componer con la inclusión a P_0 nos da un morfismo $d_1 : P_1 \to P_0$ como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "g_1"] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
& \ker \varepsilon \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Como antes, lo que es seguro es que podemos conseguir un epimorfismo $g_1 : P_1 \to \ker \varepsilon$, que al componer con la inclusión a P_0 nos da un morfismo $d_1 : P_1 \to P_0$ como en el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "g_1"] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
& \ker \varepsilon \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

La fila de arriba es exacta, pero no necesariamente tenemos un cero a la izquierda. Volvemos a tener el mismo inconveniente de antes! ¿Como seguimos?

Podemos proceder inductivamente: para cada $p \geq 1$ consideramos un módulo libre P_{p+1} y un epimorfismo $g_{p+1} : P_{p+1} \to \ker d_p$. Definimos d_{p+1} como componer a g_{p+1} con la inclusión $\ker d_p \hookrightarrow P_p$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & P_3 \arrow[rr, "d_3"] \arrow[dr, "g_3"] & & P_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr, "g_2"] & & P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "g_1"] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \ker d_3 \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & \ker d_2 \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & \ker d_1 \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & \ker \varepsilon \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Podemos proceder inductivamente: para cada $p \geq 1$ consideramos un módulo libre P_{p+1} y un epimorfismo $g_{p+1} : P_{p+1} \to \ker d_p$. Definimos d_{p+1} como componer a g_{p+1} con la inclusión $\ker d_p \hookrightarrow P_p$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & P_3 \arrow[rr, "d_3"] \arrow[dr, "g_3"] & & P_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr, "g_2"] & & P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "g_1"] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \ker d_3 \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & \ker d_2 \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & \ker d_1 \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & \ker \varepsilon \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Ahora hay que ver que el complejo es exacto: por construcción, la imagen de d_p es exactamente el ńucleo de g_{p-1}, que a su vez es el núcleo de d_{p-1}.

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Todavía nos quedan dos ítems del ejercicio pendientes. El último ítem pide calcular algunas resoluciones proyectivas (sugerencia: recordar los ejemplos de complejos que vimos al principio, y notar que un ideal principal es libre). Resolvamos (c).

Ejercicio (práctica 6, ej. 9, ítem c)

Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos y $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M, Q_\bullet \xrightarrow{\delta} N$ son resoluciones proyectivas, entonces existen morifsmos $f_p : P_p \to Q_p$ para cada $p \geq 0$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_p \arrow[r, "d_p"] \arrow[d, "f_p"] & P_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{p-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_p \arrow[r, "\partial_p"] & Q_{p-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1"] & Q_0 \arrow[r, "\delta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Una observación importante es que alcanza probar que para cada $p \geq 0$ conmuta el diagrama que se obtiene de "recortar" el anterior y quedarnos con ambos complejos hasta el lugar p y $f_0, \cdots, f_p$. Más todavía, basta ver que $f\varepsilon = \delta f_0$ y $\partial_p f_p = f_{p-1} d_p$ para todo $p \geq 1$.

Empecemos por construir $f_0 : P_0 \to Q_0$. No sabemos nada concreto sobre los módulos involucrados: solo que ε, δ son epimorfismos y P_0, Q_0 son proyectivos. ¿Qué podemos hacer con esta información?

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\exists f_0 ?"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ Q_0 \arrow[r, "\delta"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Una observación importante es que alcanza probar que para cada $p \geq 0$ conmuta el diagrama que se obtiene de "recortar" el anterior y quedarnos con ambos complejos hasta el lugar p y $f_0, \cdots, f_p$. Más todavía, basta ver que $f\varepsilon = \delta f_0$ y $\partial_p f_p = f_{p-1} d_p$ para todo $p \geq 1$.

Empecemos por construir $f_0 : P_0 \to Q_0$. No sabemos nada concreto sobre los módulos involucrados: solo que ε, δ son epimorfismos y P_0, Q_0 son proyectivos. ¿Qué podemos hacer con esta información?

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\exists f_0\ ?"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ Q_0 \arrow[r, "\delta"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como P_0 es proyectivo y δ es un epimorfismo, podemos levantar $f\varepsilon : P_0 \to N$ a cierta $f_0 : P_0 \to Q_0$ que hace conmutar el diagrama.

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Ahora veamos que existe $f_1 : P_1 \to Q_1$ tal que el siguiente diagrama conmuta. ¿Podemos hacer lo mismo que antes?

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\exists f_1?"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
Q_1 \arrow[r, "\partial_1"] & Q_0 \arrow[r, "\delta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Ahora veamos que existe $f_1 : P_1 \to Q_1$ tal que el siguiente diagrama conmuta. ¿Podemos hacer lo mismo que antes?

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\exists f_1 ?"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
Q_1 \arrow[r, "\partial_1"] & Q_0 \arrow[r, "\delta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

No sabemos que ∂_1 sea epimorfismo, así que algo distinto hay que hacer. Queremos reciclar de todas formas la idea de levantar $f_0 d_1$ a Q_1 de alguna forma. Para esto, hacemos la siguiente observación: siguiendo el diagrama vemos que $\delta f_0 d_1 = f \varepsilon d_1 = 0$ así que por exactitud

$$\text{im } f_0 d_1 \subset \ker \delta = \text{im } \partial_1.$$

Resoluciones Proyectivas - (cont.)

Podemos entonces levantar la correstricción de $f_0 d_1$ a su imagen con respecto a $\partial_1| : Q_1 \to \operatorname{im} \partial_1$, y definimos así a $f_1 : P_1 \to Q_1$:

$$
\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "f_0 d_1|"] \arrow[dd, dashed, "\exists f_1"'] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dd, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[dd, "f"] & 0 \\
 & \operatorname{im} \partial_1 \arrow[dr, hook] & & & \\
Q_1 \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[ur, "\partial_1|"] & & Q_0 \arrow[r, "\delta"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Siguiendo el diagrama vemos que efectivamente $\partial_1 f_1 = f_0 d_1$.

Procedemos inductivamente: como $\partial_{p-1} f_{p-1} d_p = f_{p-2} d_{p-1} d_p = 0$ por exactitud im $f_{p-1} d_p \subset \ker \partial_{p-1} = \text{im } \partial_p$ y podemos entonces tomar $f_p : P_p \to Q_p$ para que el diagrama conmute,

$$
\begin{tikzcd}
P_p \arrow[rr, "d_p"] \arrow[dr, "f_{p-1}d_p|"] \arrow[dd, dashed, "\exists f_p"'] & & P_{p-1} \arrow[r, "d_{p-1}"] \arrow[dd, "f_{p-1}"] & P_{p-2} \arrow[r] \arrow[dd, "f_{p-2}"] & \cdots \\
& \text{im } \partial_p \arrow[dr, hook] & & & \\
Q_p \arrow[ur, "\partial_p|"] \arrow[rr, "\partial_p"] & & Q_{p-1} \arrow[r, "\partial_{p-1}"] & Q_{p-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Resoluciones Inyectivas

El último ejercicio de la práctica 6 pide hacer algo similar al ejercicio anterior, para módulos inyectivos. El procedimiento es parecido, pero usa el siguiente resultado:

Proposición

Si M es un A-módulo, existe un módulo inyectivo I y un monomorfismo $f : M \to I$.

Si bien el enunciado análogo para proyectivos era sencillo, esta proposición requiere mucho más trabajo. Los ejercicios 12 a 16 de la práctica 6 dan una demostración guiada.

El lema de los cinco

Los argumentos de antes involucraban varias veces seguir ciertos diagramas para entender lo que pasaba. Esta idea se conoce como "*diagram chasing*". El ejercicio que sigue es el lema de los cinco y es otra instancia de esto mismo,

Ejercicio (práctica 6, ej. 8)

Consideremos un diagrama conmutativo de A-módulos

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

y supongamos que las filas son exactas. Probar que

i) *Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.*

ii) *Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.*

iii) *Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.*

El lema de los cinco

Los ítems (ii) e (iii) se resuelve de la forma muy similar, y ambos ítems prueban (i).

El lema de los cinco

Los ítems (ii) e (iii) se resuelve de la forma muy similar, y ambos ítems prueban (i). Veamos (ii).

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, two heads, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, tail, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, tail, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

El lema de los cinco

Los ítems (ii) e (iii) se resuelve de la forma muy similar, y ambos ítems prueban (i). Veamos (ii).

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, two heads, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, tail, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, tail, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

- Tomemos $x \in M_3$ tal que $\alpha_3(x) = 0$.

El lema de los cinco

Los ítems (ii) e (iii) se resuelve de la forma muy similar, y ambos ítems prueban (i). Veamos (ii).

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, two heads, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, tail, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, tail, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

- Tomemos $x \in M_3$ tal que $\alpha_3(x) = 0$.
- Por lo tanto, es $\alpha_4 f_3(x) = g_3\alpha_3(x) = g_3(0) = 0$ y como α_4 es mono, tiene que ser $f_3(x) = 0$.

El lema de los cinco

Los ítems (ii) e (iii) se resuelve de la forma muy similar, y ambos ítems prueban (i). Veamos (ii).

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, two heads, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, tail, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, tail, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

- Tomemos $x \in M_3$ tal que $\alpha_3(x) = 0$.
- Por lo tanto, es $\alpha_4 f_3(x) = g_3\alpha_3(x) = g_3(0) = 0$ y como α_4 es mono, tiene que ser $f_3(x) = 0$.
- Ahora usamos exactitud de la fila de arriba: existe $y \in M_2$ tal que $f_2(y) = x$.

El lema de los cinco

Los ítems (ii) e (iii) se resuelve de la forma muy similar, y ambos ítems prueban (i). Veamos (ii).

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, two heads, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, tail, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, tail, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

- Tomemos $x \in M_3$ tal que $\alpha_3(x) = 0$.
- Por lo tanto, es $\alpha_4 f_3(x) = g_3\alpha_3(x) = g_3(0) = 0$ y como α_4 es mono, tiene que ser $f_3(x) = 0$.
- Ahora usamos exactitud de la fila de arriba: existe $y \in M_2$ tal que $f_2(y) = x$.
- Como $g_2(\alpha_2(y)) = \alpha_3 f_2(y) = \alpha_3(x) = 0$, por exactitud de la fila de abajo existe $z \in N_1$ tal que $g_1(z) = \alpha_2(y)$.

El lema de los cinco

Los ítems (ii) e (iii) se resuelve de la forma muy similar, y ambos ítems prueban (i). Veamos (ii).

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, two heads, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, tail, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, tail, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

- Tomemos $x \in M_3$ tal que $\alpha_3(x) = 0$.
- Por lo tanto, es $\alpha_4 f_3(x) = g_3\alpha_3(x) = g_3(0) = 0$ y como α_4 es mono, tiene que ser $f_3(x) = 0$.
- Ahora usamos exactitud de la fila de arriba: existe $y \in M_2$ tal que $f_2(y) = x$.
- Como $g_2(\alpha_2(y)) = \alpha_3 f_2(y) = \alpha_3(x) = 0$, por exactitud de la fila de abajo existe $z \in N_1$ tal que $g_1(z) = \alpha_2(y)$.
- El morfismo α_1 es epi, así que existe $w \in M_1$ tal que $\alpha_1(w) = z$ y entonces $\alpha_2(f_1(w)) = g_1(\alpha_1(w)) = g_1(z) = \alpha_2(y)$.

El lema de los cinco

Los ítems (ii) e (iii) se resuelve de la forma muy similar, y ambos ítems prueban (i). Veamos (ii).

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, two heads, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, tail, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, tail, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5
\end{tikzcd}$$

- Tomemos $x \in M_3$ tal que $\alpha_3(x) = 0$.
- Por lo tanto, es $\alpha_4 f_3(x) = g_3\alpha_3(x) = g_3(0) = 0$ y como α_4 es mono, tiene que ser $f_3(x) = 0$.
- Ahora usamos exactitud de la fila de arriba: existe $y \in M_2$ tal que $f_2(y) = x$.
- Como $g_2(\alpha_2(y)) = \alpha_3 f_2(y) = \alpha_3(x) = 0$, por exactitud de la fila de abajo existe $z \in N_1$ tal que $g_1(z) = \alpha_2(y)$.
- El morfismo α_1 es epi, así que existe $w \in M_1$ tal que $\alpha_1(w) = z$ y entonces $\alpha_2(f_1(w)) = g_1(\alpha_1(w)) = g_1(z) = \alpha_2(y)$.
- Como α_2 es mono, se tiene que $y = f_1(w)$ y entonces una vez más por exactitud de la fila de arriba $x = f_2(y) = f_2 f_1(w) = 0$. Esto prueba que α_3 es mono.

Volviendo a la homología

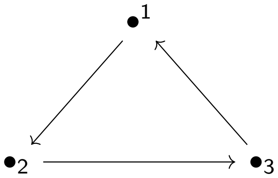
Los anteriores ejercicios están relacionados con el álgebra homológica.

Históricamente, la homología es una herramienta que nace en topología para medir los "agujeros" de un espacio. Veamos un ejemplo muy sencillo de esta idea.

La homología de un grafo

Sea X un grafo con vértices $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y aristas $E = \{e_1, \cdots, e_m\}$ que pensamos como pares de vértices. Notaremos $s(e_j)$ y $t(e_j)$ al vértice en el que comienza y termina un arista respectivamente.

Por ejemplo, si $V = \{1, 2, 3\}$ y $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ el grafo X es el de la siguiente figura:



La homología de un grafo (cont.)

Construiremos un complejo (muy pequeño!) asociado a X

$$0 \to C_1 \xrightarrow{d} C_0 \to 0$$

de la siguiente forma: en el lugar 0, definiremos C_0 como el $\mathbb{Z}$-módulo libre con base en los vértices $v_1, \dots, v_n$ de G. Similarmente, consideraremos el $\mathbb{Z}$-módulo libre C_1 cuya base son los aristas $e_1, \cdots, e_m$ de X.

La homología de un grafo (cont.)

Construiremos un complejo (muy pequeño!) asociado a X

$$0 \to C_1 \xrightarrow{d} C_0 \to 0$$

de la siguiente forma: en el lugar 0, definiremos C_0 como el $\mathbb{Z}$-módulo libre con base en los vértices $v_1, \dots, v_n$ de G. Similarmente, consideraremos el $\mathbb{Z}$-módulo libre C_1 cuya base son los aristas $e_1, \cdots, e_m$ de X.

La función d quedará determinada al definirla en una base de C_1. Si e_j es un vértice, definimos $d(e_j) = t(e_j) - s(e_j)$. Intuitivamente, queremos enviar un arista "a su borde".

La homología de un grafo (cont.)

Construiremos un complejo (muy pequeño!) asociado a X

$$0 \to C_1 \xrightarrow{d} C_0 \to 0$$

de la siguiente forma: en el lugar 0, definiremos C_0 como el $\mathbb{Z}$-módulo libre con base en los vértices $v_1, \ldots, v_n$ de G. Similarmente, consideraremos el $\mathbb{Z}$-módulo libre C_1 cuya base son los aristas $e_1, \cdots, e_m$ de X.

La función d quedará determinada al definirla en una base de C_1. Si e_j es un vértice, definimos $d(e_j) = t(e_j) - s(e_j)$. Intuitivamente, queremos enviar un arista "a su borde".

Vamos a calcular su homología, que es

$$H_0(X) := H_0(C) = \text{coker } d = C_0/\text{im } d, \quad H_1(X) := H_1(C) = \ker d.$$

Veamos algunos ejemplos concretos.

La homología de $X = \bullet_{v_1} \quad \bullet_{v_2}$

Si X consiste sólo de dos vértices v_1 y v_2, sin arista entonces $C_1 = 0$ y $C_0 = v_1\mathbb{Z} \oplus v_2\mathbb{Z}$. La función $d : C_1 \to C_0$ es la función cero y entonces

$$0 \to 0 \to C_0 \to 0$$

es el complejo en cuestión. Por lo tanto,

$$H_0(X) = C_0/\text{im } d \simeq C_0 \simeq \mathbb{Z}^2.$$

y $H_k(X) = 0$ si $k \neq 0$.

La homología de $X = \bullet_{v_1} \xrightarrow{e} \bullet_{v_2}$

Si X consiste sólo de dos vértices v_1 y v_2 y un arista $e = (v_1, v_2)$, entonces $C_1 = e\mathbb{Z}$ y $C_0 = v_1\mathbb{Z} \oplus v_2\mathbb{Z}$. La función $d : C_1 \to C_0$ queda determinada por la imagen de e, que es $d(e) = t(e) - s(e) = v_2 - v_1$. El complejo en cuestión es

$$0 \to e\mathbb{Z} \xrightarrow{d} v_1\mathbb{Z} \oplus v_2\mathbb{Z} \to 0$$

y bajo los isomorfismos $C_1 \simeq \mathbb{Z}$ y $C_0 \simeq \mathbb{Z}^2$ resulta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\simeq"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con $f(k) = (-k, k)$. Por lo tanto $H_0(X) \simeq \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\langle(-1,1)\rangle} \simeq \mathbb{Z}$ y $H_1(X) = 0$.

La homología de $X = \bullet_{v_1} \underset{e_1}{\overset{e_2}{\leftrightarrows}} \bullet_{v_2}$

Si ahora $V = \{v_1, v_2\}$ y $E = \{e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_1)\}$ entonces $d(e_1) = v_2 - v_1$ y $d(e_2) = v_1 - v_2$, el complejo es

$$0 \to e_1\mathbb{Z} \oplus e_2\mathbb{Z} \xrightarrow{d} v_1\mathbb{Z} \oplus v_2\mathbb{Z} \to 0$$

y tomando bases como antes tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{d} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si hacemos la cuenta, es

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}^2/\langle(-1,1),(1,-1)\rangle = \mathbb{Z}^2/\langle(-1,1)\rangle \simeq \mathbb{Z}$$

y

$$H_1(X) \simeq \{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 : -k+l, k-l = 0\} = \{(m,m) : m \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}.$$

La homología de un grafo (cont.)

X	$\bullet_{v_1} \qquad \bullet_{v_2}$	$\bullet_{v_1} \xrightarrow{e} \bullet_{v_2}$	$\bullet_{v_1} \underset{e_1}{\overset{e_2}{\leftrightarrows}} \bullet_{v_2}$
$H_0(X)$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$H_1(X)$	0	0	$\mathbb{Z}$

En general $H_1(X)$ mide los "agujeros" de X, mientras que $H_0(X)$ mide la cantidad de componentes conexas (que podemos interpretar como "agujeros de dimensión 0").

La homología de un grafo (cont.)

Tiene sentido preguntarse por qué esto motiva los complejos de cadenas y su homología si estamos mirando un complejo... de longitud 1.

La misma idea mide también los "agujeros" de un poliedro, enviando cada cara a los segmentos que conforman su borde: el complejo a considerar tendrá longitud 2.

Para espacios de "dimensión mayor", el complejo va a ser más grande, incluso podría tener infinitos lugares no nulos.