Álgebra II Práctica (clase 13)

Guido Arnone

Universidad de Buenos Aires

9 de Junio de 2020

Prerrequisitos

Para leer estas diapositivas se recomienda haber leído el apunte teórico hasta la Sección 3.6.

Exactitud y Hom

En la sección 3.4 del apunte teórico vimos que si

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} T \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos y N es un A-módulo arbitrario, entonces las sucesiones

$$0 \longrightarrow \hom_A(N,S) \xrightarrow{i_*} \hom_A(N,M) \xrightarrow{p_*} \hom_A(N,T)$$

y

$$0 \longrightarrow \hom_A(T,N) \xrightarrow{p^*} \hom_A(M,N) \xrightarrow{i^*} \hom_A(S,N)$$

son exactas. La exactitud a derecha es en general falsa y estudiaremos más adelante como caracterizar a los módulos N que cumplan esta propiedad.

Exactitud y Hom

Tiene sentido preguntarse entonces:

Tiene sentido preguntarse entonces:

- ¿Cuál es la relevancia de las sucesiones exactas?

Exactitud y Hom

Tiene sentido preguntarse entonces:

- ¿Cuál es la relevancia de las sucesiones exactas?
- ¿Por qué nos interesa entender $\hom_A(N, -)$ y $\hom_A(-, N)$?

Estudiar cuando un módulo N preserva la exactitud a derecha de las anteriores sucesiones nos dice información sobre las sucesiones exactas en las que está involucrado N.

Veamos un ejemplo donde la exactitud de una sucesión nos dá información geométrica.

Campos Conservativos

Necesitamos primero recordar algunas nociones de Análisis II.

Campos Conservativos

Necesitamos primero recordar algunas nociones de Análisis II. Si $U \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ es una función suave, su gradiente es

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) : U \to \mathbb{R}^3.$$

Campos Conservativos

Necesitamos primero recordar algunas nociones de Análisis II. Si $U \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ es una función suave, su gradiente es

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) : U \to \mathbb{R}^3.$$

Por otro lado, si $F : U \to \mathbb{R}^3$ es un campo suave, su rotor es

$$\mathrm{rot}(F) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) : U \to \mathbb{R}^3$$

y su divergencia es $\mathrm{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.

Campos Conservativos

Necesitamos primero recordar algunas nociones de Análisis II. Si $U \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ es una función suave, su gradiente es

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) : U \to \mathbb{R}^3.$$

Por otro lado, si $F : U \to \mathbb{R}^3$ es un campo suave, su rotor es

$$\mathrm{rot}(F) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) : U \to \mathbb{R}^3$$

y su divergencia es $\mathrm{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.

Sabemos que para toda función suave $f : U \to \mathbb{R}$ y campo $F : U \to \mathbb{R}^3$ se tiene que $\mathrm{rot}(\nabla f) \equiv 0$ y $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) \equiv 0$.

Campos Conservativos (cont.)

Se tiene así una sucesión de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y morfismos $\mathbb{R}$-lineales

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}) \overset{\nabla(-)}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \overset{\mathrm{rot}}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \overset{\mathrm{div}}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

donde la imagen de cada morfismo está contenido en el núcleo del siguiente. Esta sucesión será exacta si:

Campos Conservativos (cont.)

Se tiene así una sucesión de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y morfismos $\mathbb{R}$-lineales

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}) \overset{\nabla(-)}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \overset{\mathrm{rot}}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \overset{\mathrm{div}}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

donde la imagen de cada morfismo está contenido en el núcleo del siguiente. Esta sucesión será exacta si:

- $\nabla f \equiv 0$ implica que f es constante,

Campos Conservativos (cont.)

Se tiene así una sucesión de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y morfismos $\mathbb{R}$-lineales

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}) \stackrel{\nabla(-)}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \stackrel{\mathrm{rot}}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \stackrel{\mathrm{div}}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

donde la imagen de cada morfismo está contenido en el núcleo del siguiente. Esta sucesión será exacta si:

- $\nabla f \equiv 0$ implica que f es constante,
- Todo campo de rotor nulo es conservativo, y

Campos Conservativos (cont.)

Se tiene así una sucesión de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y morfismos $\mathbb{R}$-lineales

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}) \stackrel{\nabla(-)}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \stackrel{\mathrm{rot}}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \stackrel{\mathrm{div}}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

donde la imagen de cada morfismo está contenido en el núcleo del siguiente. Esta sucesión será exacta si:

- $\nabla f \equiv 0$ implica que f es constante,
- Todo campo de rotor nulo es conservativo, y
- Todo campo de divergencia nula es un rotor.

En Análisis II se vé que si U es simplemente conexo las condiciones anteriores se satisfacen, pero en general esto depende de la región.

Campos Conservativos (cont.)

Se tiene así una sucesión de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y morfismos $\mathbb{R}$-lineales

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}) \overset{\nabla(-)}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \overset{\text{rot}}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}^3) \overset{\text{div}}{\longrightarrow} \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

donde la imagen de cada morfismo está contenido en el núcleo del siguiente. Esta sucesión será exacta si:

- $\nabla f \equiv 0$ implica que f es constante,
- Todo campo de rotor nulo es conservativo, y
- Todo campo de divergencia nula es un rotor.

En Análisis II se vé que si U es simplemente conexo las condiciones anteriores se satisfacen, pero en general esto depende de la región.

Estudiar algebraicamente la exactitud de esta sucesión nos dá información geométrica sobre U. La versión general de esta idea se vé en Geometría Diferencial.

Los funtores $\hom_A(M, -)$ y $\hom_A(-, M)$

Volvamos ahora al ejemplo con el que empezamos. Sabemos que dado un A-módulo N, para todo A-módulo los conjuntos $\hom_A(N, M)$ y $\hom_A(M, N)$ tienen estructura de $Z(A)$-módulos, y en particular, de grupos abelianos.

Los funtores $\hom_A(M, -)$ y $\hom_A(-, M)$

Volvamos ahora al ejemplo con el que empezamos. Sabemos que dado un A-módulo N, para todo A-módulo los conjuntos $\hom_A(N, M)$ y $\hom_A(M, N)$ tienen estructura de $Z(A)$-módulos, y en particular, de grupos abelianos.

Además, dado $f : S \to T$ un morfismo de A-módulos, tenemos aplicaciones $f_* \colon \hom_A(N, S) \to \hom_A(N, T)$ y $f^* : \hom_A(T, N) \to \hom_A(S, N)$.

Los funtores $\hom_A(M,-)$ y $\hom_A(-,M)$

Volvamos ahora al ejemplo con el que empezamos. Sabemos que dado un A-módulo N, para todo A-módulo los conjuntos $\hom_A(N,M)$ y $\hom_A(M,N)$ tienen estructura de $Z(A)$-módulos, y en particular, de grupos abelianos.

Además, dado $f : S \to T$ un morfismo de A-módulos, tenemos aplicaciones $f_*\colon \hom_A(N,S) \to \hom_A(N,T)$ y $f^* : \hom_A(T,N) \to \hom_A(S,N)$.

Más todavía, las asignaciónes $(-)^*$ y $(-)_*$ respetan (o invierten) el orden de la composición y preservan las identidades:

- $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.
- $(id_S)_* = id_{\hom_A(N,S)}$.
- $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$.
- $(id_S)^* = id_{\hom_A(S,N)}$.

Los funtores $\hom_A(M, -)$ y $\hom_A(-, M)$ (cont.)

Las anteriores son instancias particulares de lo que en teoría de categorías se conoce como un funtor. Una idea que puede ser formalizada en el contexto de las categorías es la siguiente: dos objetos serán isomorfos si y sólo si "se relacionan de igual forma" con los demás objetos.

Veamos una instancia concreta de este resultado,

Los funtores $\hom_A(M, -)$ y $\hom_A(-, M)$ (cont.)

Las anteriores son instancias particulares de lo que en teoría de categorías se conoce como un funtor. Una idea que puede ser formalizada en el contexto de las categorías es la siguiente: dos objetos serán isomorfos si y sólo si "se relacionan de igual forma" con los demás objetos.

Veamos una instancia concreta de este resultado,

Proposición

Sea $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$ una sucesión de A-módulos. Si

$$\hom_A(N, S) \xrightarrow{f_*} \hom_A(N, T) \xrightarrow{g_*} \hom_A(N, U)$$

es exacta para todo A-módulo N, entonces $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$ es exacta.

Los funtores $\hom_A(M, -)$ y $\hom_A(-, M)$ (cont.)

Proposición

Sea $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$ una sucesión de A-módulos. Si

$$\hom_A(N, S) \xrightarrow{f_*} \hom_A(N, T) \xrightarrow{g_*} \hom_A(N, U)$$

es exacta para todo A-módulo N, entonces $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$ es exacta.

Demostración.

Los funtores $\hom_A(M,-)$ y $\hom_A(-,M)$ (cont.)

Proposición

Sea $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$ una sucesión de A-módulos. Si

$$\hom_A(N,S) \xrightarrow{f_*} \hom_A(N,T) \xrightarrow{g_*} \hom_A(N,U)$$

es exacta para todo A-módulo N, entonces $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$ es exacta.

Demostración.

Notemos primero que tomando $N = S$, es

$$gf = (g_* \circ f_*)(id_S) = 0(id_S) = 0$$

así que $\operatorname{im} f \subset \ker g$.

Los funtores $\hom_A(M, -)$ y $\hom_A(-, M)$ (cont.)

Proposición

Sea $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$ *una sucesión de A-módulos. Si*

$$\hom_A(N, S) \xrightarrow{f_*} \hom_A(N, T) \xrightarrow{g_*} \hom_A(N, U)$$

es exacta para todo A-módulo N*, entonces* $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$ *es exacta.*

Demostración.

Notemos primero que tomando $N = S$, es

$$gf = (g_* \circ f_*)(id_S) = 0(id_S) = 0$$

así que $\mathrm{im}\ f \subset \ker g$. Por otro lado, tomando $N = \ker g$ e $i : \ker g \hookrightarrow T$ la inclusión, es $g_*(i) = 0$. Existe entonces $h : \ker g \to S$ tal que $i = f_*(h) = fh$ y por lo tanto $\ker g = \mathrm{im}\ i \subset \mathrm{im}\ f$. □

Los funtores $\hom_A(M, -)$ y $\hom_A(-, M)$ (cont.)

Corolario

Sea $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \to \cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n$ *una sucesión de A-módulos. Si*

$$\hom_A(N, M_0) \xrightarrow{(f_1)_*} \hom_A(N, M_1) \to \cdots \to \hom_A(N, M_{n-1}) \xrightarrow{(f_n)_*} \hom_A(N, M_n)$$

es exacta para todo A-módulo N, la sucesión original es exacta.

Los funtores $\hom_A(M, -)$ y $\hom_A(-, M)$ (cont.)

Corolario

Sea $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \to \cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n$ *una sucesión de A-módulos. Si*

$$\hom_A(N, M_0) \xrightarrow{(f_1)_*} \hom_A(N, M_1) \to \cdots \to \hom_A(N, M_{n-1}) \xrightarrow{(f_n)_*} \hom_A(N, M_n)$$

es exacta para todo A-módulo N, la sucesión original es exacta.

Corolario

Un morfismo de A-módulos $f : S \to T$ *es un isomorfismo si y sólo si* $f_* : \hom_A(N, S) \to \hom_A(N, T)$ *es un isomorfismo para todo A-módulo N.*

Demostración.

Si f es un isomorfismo con inversa g, entonces f_* es un isomorfismo con inversa g_*. La recíproca se desprende del colorario anterior, observando que $h : M \to M'$ es un isomorfismo si y sólo si $0 \to M \xrightarrow{h} M' \to 0$ es exacta. □

Módulos Libres

Recordemos que un subconjunto B de un A-módulo M es un sistema de generadores si para cada $m \in M$ existen $b_1, \cdots, b_n \in B$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $m = a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n$.

Decimos que B es linealmente independiente si $a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n = 0$ implica $a_1 = \cdots = a_n = 0$ para cada $b_1, \cdots, b_n \in B$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Una base de M es un sistema de generadores linealmente independiente. Si M admite una base, decimos que es un A-módulo libre, y en tal caso se tiene un isomorfismo $M \simeq A^{(B)}$.

Módulos Libres

Recordemos que un subconjunto B de un A-módulo M es un sistema de generadores si para cada $m \in M$ existen $b_1, \cdots, b_n \in B$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $m = a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n$.

Decimos que B es linealmente independiente si $a_1 \cdot b_1 + \cdots + a_n \cdot b_n = 0$ implica $a_1 = \cdots = a_n = 0$ para cada $b_1, \cdots, b_n \in B$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Una base de M es un sistema de generadores linealmente independiente. Si M admite una base, decimos que es un A-módulo libre, y en tal caso se tiene un isomorfismo $M \simeq A^{(B)}$.

Observación

Todo A-módulo M es cociente de un módulo libre: como M es un sistema de generadores de sí mismo, se tiene un epimorfismo $p : A^{(M)} \to M$ y por lo tanto $M \simeq A^{(M)} / \ker p$.

Módulos Libres

Observación

Si M es un A-módulo libre con base B, un morfismo A-lineal $M \to N$ está determinado por elegir las imágenes de una base. Esto se desprende de la propiedad universal de la suma directa junto con el isomorfismo $M \simeq A^{(B)}$,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A^{(B)} \arrow[d, dashed, "\exists!\ \widetilde{f}"] \\ M \arrow[ur, "\wr"] \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

pues $\hom_A(M, N) \simeq \hom_A(A^{(B)}, N) \simeq \hom_A(A, N)^B \simeq N^B$.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso?

- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces M/S es libre.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso?

- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces M/S es libre.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso?

- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces M/S es libre. Falso! Por ejemplo: si bien $\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}$-módulos libres con bases $\{1\}$ y $\{n\}$ respectivamente, el cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. ¿Por qué?

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso?

- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces M/S es libre. Falso! Por ejemplo: si bien $\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}$-módulos libres con bases $\{1\}$ y $\{n\}$ respectivamente, el cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. ¿Por qué?
- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces S es libre.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso?

- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces M/S es libre. Falso! Por ejemplo: si bien $\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}$-módulos libres con bases $\{1\}$ y $\{n\}$ respectivamente, el cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. ¿Por qué?
- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces S es libre.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso?

- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces M/S es libre. Falso! Por ejemplo: si bien $\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}$-módulos libres con bases $\{1\}$ y $\{n\}$ respectivamente, el cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. ¿Por qué?
- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces S es libre. Falso! Por ejemplo: como módulo sobre sí mismo $\mathbb{Z}_6$ es libre, pero $\langle [2] \rangle \subset \mathbb{Z}_6$ tiene menos de 6 elementos así que no puede ser libre.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso?

- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces M/S es libre. Falso! Por ejemplo: si bien $\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}$-módulos libres con bases $\{1\}$ y $\{n\}$ respectivamente, el cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. ¿Por qué?
- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces S es libre. Falso! Por ejemplo: como módulo sobre sí mismo $\mathbb{Z}_6$ es libre, pero $\langle [2] \rangle \subset \mathbb{Z}_6$ tiene menos de 6 elementos así que no puede ser libre.
- Si M es un A-módulo y $S \subset M$ un submódulo tal que S y M/S son libres, entonces M es libre.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso?

- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces M/S es libre. Falso! Por ejemplo: si bien $\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}$-módulos libres con bases $\{1\}$ y $\{n\}$ respectivamente, el cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. ¿Por qué?
- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces S es libre. Falso! Por ejemplo: como módulo sobre sí mismo $\mathbb{Z}_6$ es libre, pero $\langle [2] \rangle \subset \mathbb{Z}_6$ tiene menos de 6 elementos así que no puede ser libre.
- Si M es un A-módulo y $S \subset M$ un submódulo tal que S y M/S son libres, entonces M es libre.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso?

- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces M/S es libre. Falso! Por ejemplo: si bien $\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ son $\mathbb{Z}$-módulos libres con bases $\{1\}$ y $\{n\}$ respectivamente, el cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo libre. ¿Por qué?
- Si M es un A-módulo libre y $S \subset M$ un submódulo, entonces S es libre. Falso! Por ejemplo: como módulo sobre sí mismo $\mathbb{Z}_6$ es libre, pero $\langle [2] \rangle \subset \mathbb{Z}_6$ tiene menos de 6 elementos así que no puede ser libre.
- Si M es un A-módulo y $S \subset M$ un submódulo tal que S y M/S son libres, entonces M es libre. Verdadero! Veamos la demostración.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso? (cont.)

Proposición

Si M es un A-módulo y $S \subset M$ un submódulo tal que S y M/S son libres, entonces M es libre.

Demostración.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso? (cont.)

Proposición

Si M es un A-módulo y $S \subset M$ un submódulo tal que S y M/S son libres, entonces M es libre.

Demostración.

Sea $B' = \{b_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una base de S y $B'' = \{[c_\beta]\}_{\beta \in \Gamma}$ una base de M/S. Veamos que $B = \{b_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \cup \{c_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ es base de M.

Proposición

Si M es un A-módulo y $S \subset M$ un submódulo tal que S y M/S son libres, entonces M es libre.

Demostración.

Sea $B' = \{b_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una base de S y $B'' = \{[c_\beta]\}_{\beta \in \Gamma}$ una base de M/S. Veamos que $B = \{b_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \cup \{c_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ es base de M.
$\underline{B \text{ genera:}}$ si $m \in M$, entonces existen $a_1, \cdots, a_m \in A$ y $c_{\beta_1}, \dots, c_{\beta_n}$ tales que $[m] = a_1[c_{\beta_1}] + \cdots + a_n[c_{\beta_n}] = [a_1 c_{\beta_1} + \cdots + a_n c_{\beta_n}]$. Por lo tanto, sabemos que $m - (a_1 c_{\beta_1} + \cdots + a_n c_{\beta_n}) \in S$ y deben existir $a'_1, \cdots a'_m \in A$ tales que $m - (a_1 c_{\beta_1} + \cdots + a_n c_{\beta_n}) = a'_1 b_{\alpha_1} + \cdots + a'_m b_{\alpha_m}$ y entonces $m = a_1 c_{\beta_1} + \cdots + a_n c_{\beta_n} + a'_1 b_{\alpha_1} + \cdots + a'_n b_{\alpha_m}$.

Módulos Libres - ¿Verdadero o Falso? (cont.)

Proposición

Si M es un A-módulo y $S \subset M$ un submódulo tal que S y M/S son libres, entonces M es libre.

Demostración.

Sea $B' = \{b_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una base de S y $B'' = \{[c_\beta]\}_{\beta \in \Gamma}$ una base de M/S.
Veamos que $B = \{b_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \cup \{c_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ es base de M.
B genera: si $m \in M$, entonces existen $a_1, \cdots, a_m \in A$ y $c_{\beta_1}, \ldots, c_{\beta_n}$ tales que $[m] = a_1[c_{\beta_1}] + \cdots + a_n[c_{\beta_n}] = [a_1 c_{\beta_1} + \cdots + a_n c_{\beta_n}]$. Por lo tanto, sabemos que $m - (a_1 c_{\beta_1} + \cdots + a_n c_{\beta_n}) \in S$ y deben existir $a'_1, \cdots a'_m \in A$ tales que $m - (a_1 c_{\beta_1} + \cdots + a_n c_{\beta_n}) = a'_1 b_{\alpha_1} + \cdots + a'_m b_{\alpha_m}$ y entonces $m = a_1 c_{\beta_1} + \cdots + a_n c_{\beta_n} + a'_1 b_{\alpha_1} + \cdots + a'_n b_{\alpha_m}$.
B es l.i.: supongamos que $a_1 c_{\beta_1} + \cdots + a_n c_{\beta_n} + a'_1 b_{\alpha_1} + \cdots + a'_m b_{\alpha_m} = 0$. Esto nos dice que $a_1[c_{\beta_1}] + \cdots + a_n[c_{\beta_n}] = 0$ así que $a_i = 0$ para todo i. Vemos de esta manera que la combinación lineal original sólo tiene elementos de la base de S, y entonces $a'_j = 0$ para todo j. $\square$

Un Ejercicio

Ejercicio

Sea

$$0 \to S \xrightarrow{i} T \xrightarrow{p} L \to 0$$

una sucesión exacta corta de A-módulos. Probar que si L es libre la sucesión se parte, y deducir que en tal caso que la sucesión

$$0 \to \hom_A(N, S) \xrightarrow{i_*} \hom_A(N, T) \xrightarrow{p_*} \hom_A(N, L) \to 0$$

es exacta para todo A-módulo N.