Álgebra II

Primer Cuatrimestre – 2020

Clases Prácticas

19 de Mayo

Ejercicio 1. Probar que $\mathscr{U}(\mathbb{Z}[i]) = \{1, -1, i, -i\}$.

Resolución. Siguiendo la sugerencia de la clase, definimos la **norma** de $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ como $N(a + ib) := a^2 + b^2 \in \mathbb{N}_0$. Notar que $N(a + ib) = |a + ib|^2$ donde $|\cdot|$ es el módulo de números complejos, así que $N(zw) = N(z)N(w)$ para todo $z, w \in \mathbb{Z}[i]$.

Fijemos ahora $z = a + ib \in \mathscr{U}(\mathbb{Z}[i])$. Existe entonces $w \in \mathbb{Z}[i]$ tal que $zw = 1$ y tomando norma, esto nos dice que $N(z)N(w) = 1$. La ecuación anterior involucra únicamente a enteros no negativos, así que en particular debe ser

$$1 = N(z) = a^2 + b^2$$

y entonces $a = \pm 1$ y $b = 0$ ó $a = 0$ y $b = \pm 1$. Es decir, necesariamente $z \in \{1, -1, i, -i\}$. Resta ver que estos cuatro elementos son unidades, y eso es porque $1 = (-1)^2 = (-i) \cdot i$. ■

Ejercicio 2. Sea A un anillo conmutativo. Probar que A es un dominio si y sólo si $A[[X]]$ lo es.

Resolución. Dado $h = \sum_{n \geq 0} c_n X^n \in A[[X]]$, notaremos $[h]_n = c_n$. Si A no es un dominio, entonces existen $a, b \in A$ no nulos tales que $ab = 0$. Considerando $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ y $g = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ con $a_0 = a$, $b_0 = b$ y $a_n, b_n = 0$ si $n \geq 1$, se tiene que $f, g \neq 0$ pero $fg = 0$. En consecuencia, vemos que $A[[X]]$ no es un dominio.

Veamos ahora el recíproco: supongamos para esto que A es un dominio y tomemos $f, g \in A[[X]] \setminus \{0\}$. Consideramos ahora $i := \min\{n \in \mathbb{N} : [f]_n \neq 0\}$ y $j := \min\{n \in \mathbb{N} : [g]_n \neq 0\}$. Notar que ambos mínimos tienen sentido, pues al f y g ser series no nulas alguno de sus coeficientes debe ser distinto de cero.

Por definición, el coeficiente $i + j$ de fg es

$$[fg]_{i+j} = \sum_{s+t=i+j} a_s b_t.$$

Si $s < i$ ó $t < j$, sabemos que $a_s b_t = 0$ pues por definición de i y j o bien $a_s = 0$ o bien $b_t = 0$. Por lo tanto, se tiene en realidad que $[fg]_{i+j} = a_i b_j \neq 0$, siendo esto último una consecuencia de que $a_i, b_j \neq 0$ y A es un dominio. En conclusión, se tiene que $fg \neq 0$, lo que termina de probar que $A[[X]]$ es un dominio. ■

Ejercicio 3. Sea A un anillo y $P \triangleleft A$ un ideal primo que no contiene divisores de cero. Probar que A es un dominio.

Resolución. Veamos que dados $a, b \in A$ tales que $ab = 0$ se tiene que $a = 0$ ó $b = 0$. Como P es un ideal, tenemos que $ab = 0 \in P$, y como es primo, esto implica a su vez que $a \in P$ ó $b \in P$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a \in P$. En P no hay divisores de cero, así que al ser $ab = 0$ necesariamente es $a = 0$, lo que concluye la demostración. ■