Álgebra II Práctica (clase 9)

Iván Sadofschi Costa

Universidad de Buenos Aires

15 de Mayo de 2020

Prerrequisitos

Para leer estas diapositivas se recomienda haber leído el apunte teórico hasta el comienzo de 2.4.

Anillos

Ejemplos

$\mathbb{Z}$, $M_n(\mathbb{Z})$, $M_n(\mathbb{R})$, k, $R[x]$, $R[x][y] = R[x,y]$, ...

Anillos

Ejemplos

$\mathbb{Z}$, $M_n(\mathbb{Z})$, $M_n(\mathbb{R})$, k, $R[x]$, $R[x][y] = R[x, y]$, ...

Ejemplos

El anillo de grupo $\mathbb{Z}[G]$.

Anillos

Ejemplos

$\mathbb{Z}$, $M_n(\mathbb{Z})$, $M_n(\mathbb{R})$, k, $R[x]$, $R[x][y] = R[x, y]$, ...

Ejemplos

El anillo de grupo $\mathbb{Z}[G]$.

El anillo de grupo es, como conjunto,

$$\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}G = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \text{ con solamente finitos } a_g \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^G.$$

Los elementos son las combinaciones lineales formales con coeficientes enteros y soporte finito de los elementos de G.

Anillos

Ejemplos

$\mathbb{Z}$, $M_n(\mathbb{Z})$, $M_n(\mathbb{R})$, k, $R[x]$, $R[x][y] = R[x, y]$, ...

Ejemplos

El anillo de grupo $\mathbb{Z}[G]$.

El anillo de grupo es, como conjunto,

$$\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}G = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \text{ con solamente finitos } a_g \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^G.$$

Los elementos son las combinaciones lineales formales con coeficientes enteros y soporte finito de los elementos de G.
Tenemos que definir las operaciones de este anillo.

La suma del anillo de grupo

La suma está dada por

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

La suma del anillo de grupo

La suma está dada por

$$\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g$$

O sea que la suma es lugar a lugar.

La suma del anillo de grupo

La suma está dada por

$$\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g$$

O sea que la suma es lugar a lugar. Notar que el soporte de la suma está contenido en la unión de los soportes y por lo tanto es también finito.

El producto del anillo de grupo

El producto está dado por

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{g_1,g_2 \text{ tales que } g_1g_2=g} a_{g_1}b_{g_2}\right) g$$

El producto del anillo de grupo

El producto está dado por

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{g_1,g_2 \text{ tales que } g_1g_2=g} a_{g_1}b_{g_2}\right) g$$

Escrito de otra forma:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}\right) g$$

El producto del anillo de grupo

El producto está dado por

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{g_1,g_2 \text{ tales que } g_1g_2=g} a_{g_1}b_{g_2}\right)g$$

Escrito de otra forma:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}\right)g$$

Este producto se llama producto de convolución. Si ya vieron alguna noción de convolución (por ejemplo en Real), pensar por qué tiene sentido el nombre.

El producto del anillo de grupo

El producto está dado por

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{g_1,g_2 \text{ tales que } g_1g_2=g} a_{g_1}b_{g_2}\right)g$$

Escrito de otra forma:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}\right)g$$

Este producto se llama producto de convolución. Si ya vieron alguna noción de convolución (por ejemplo en Real), pensar por qué tiene sentido el nombre.

Notar que el soporte del producto está contenido en el producto de los soportes y por lo tanto es finito.

El producto del anillo de grupo

El producto está dado por

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{g_1,g_2 \text{ tales que } g_1g_2=g} a_{g_1}b_{g_2}\right) g$$

Escrito de otra forma:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}\right) g$$

Este producto se llama producto de convolución. Si ya vieron alguna noción de convolución (por ejemplo en Real), pensar por qué tiene sentido el nombre.

Notar que el soporte del producto está contenido en el producto de los soportes y por lo tanto es finito.

Notar que es la forma razonable de multiplicar estas cosas: queremos que $(1\cdot g)(1\cdot h)=1\cdot gh$ y para que $\mathbb{Z}G$ sea un anillo necesitamos que valga la propiedad distributiva. Esto caracteriza al producto.

Anillo de un monoide

Recordar que un monoide es un conjunto S con una operación asociativa con unidad.

Anillo de un monoide

Recordar que un monoide es un conjunto S con una operación asociativa con unidad.
La construcción explicada en las diapositivas anteriores se puede hacer en un contexto más general.

Anillo de un monoide

Recordar que un monoide es un conjunto S con una operación asociativa con unidad.
La construcción explicada en las diapositivas anteriores se puede hacer en un contexto más general.
Si R es un anillo y S es un monoide podemos construir el anillo $R[S]$.

Anillo de un monoide

Recordar que un monoide es un conjunto S con una operación asociativa con unidad.
La construcción explicada en las diapositivas anteriores se puede hacer en un contexto más general.
Si R es un anillo y S es un monoide podemos construir el anillo $R[S]$.

Ejemplos

Si $S = (\mathbb{N}_0, +)$, $R = k$ *entonces* $R[S] \simeq k[x]$ *es el anillo de polinomios en una variable sobre* k.

Anillo de un monoide

Recordar que un monoide es un conjunto S con una operación asociativa con unidad.
La construcción explicada en las diapositivas anteriores se puede hacer en un contexto más general.
Si R es un anillo y S es un monoide podemos construir el anillo $R[S]$.

Ejemplos

Si $S = (\mathbb{N}_0, +)$, $R = k$ entonces $R[S] \simeq k[x]$ es el anillo de polinomios en una variable sobre k.
Si $S = (\mathbb{N}_0, +)^n$, entonces $R[S] \simeq R[x_1, \ldots, x_n]$ es el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en R.

El anillo de un monoide (cont.)

Sea S el monoide libre en n generadores ("letras") $x_1, \ldots, x_n$. O sea el conjunto de las palabras $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ (con $k \geq 0$) con la operación dada por la concatenación de palabras.

El anillo de un monoide (cont.)

Sea S el monoide libre en n generadores ("letras") $x_1, \dots, x_n$. O sea el conjunto de las palabras $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ (con $k \geq 0$) con la operación dada por la concatenación de palabras.

Formalmente las palabras son tuplas: las letras en una palabra no conmutan. Llamarlas palabras tiene sentido, queremos que frase y fresa sean dos palabras distintas.

El anillo de un monoide (cont.)

Sea S el monoide libre en n generadores ("letras") $x_1, \dots, x_n$. O sea el conjunto de las palabras $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ (con $k \geq 0$) con la operación dada por la concatenación de palabras.

Formalmente las palabras son tuplas: las letras en una palabra no conmutan. Llamarlas palabras tiene sentido, queremos que frase y fresa sean dos palabras distintas.

El anillo $R[S]$ se llama anillo de polinomios no conmutativos en las variables $x_1, \dots, x_n$. La notación usual para este anillo es $R\{x_1, \dots, x_n\}$.

El anillo de un monoide (cont.)

Sea S el monoide libre en n generadores ("letras") $x_1, \ldots, x_n$. O sea el conjunto de las palabras $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ (con $k \geq 0$) con la operación dada por la concatenación de palabras.

Formalmente las palabras son tuplas: las letras en una palabra no conmutan. Llamarlas palabras tiene sentido, queremos que frase y fresa sean dos palabras distintas.

El anillo $R[S]$ se llama anillo de polinomios no conmutativos en las variables $x_1, \ldots, x_n$. La notación usual para este anillo es $R\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Otro caso particular del anillo de grupo es el anillo de polinomios de Laurent: $R[x_1, x_1^{-1}] \simeq R[\mathbb{Z}]$. Más generalmente

$$R[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}] = R[\mathbb{Z}^n].$$

Propiedad universal del anillo de grupo

El anillo de grupo $\mathbb{Z}G$ viene con un morfismo de grupos $i\colon G \to (\mathbb{Z}G)^\times$.

Vale la siguiente propiedad universal:

Propiedad universal del anillo de grupo

El anillo de grupo $\mathbb{Z}G$ viene con un morfismo de grupos $i\colon G \to (\mathbb{Z}G)^\times$.

Vale la siguiente propiedad universal:

Sea G un grupo, R un anillo y $\varphi\colon G \to R^\times$ un morfismo de grupos. Entonces existe un único morfismo de anillos

$$\overline{\varphi}\colon \mathbb{Z}G \to R$$

tal que $\overline{\varphi} = \varphi \circ i$.

Propiedad universal del anillo de grupo

El anillo de grupo $\mathbb{Z}G$ viene con un morfismo de grupos $i\colon G \to (\mathbb{Z}G)^\times$.

Vale la siguiente propiedad universal:

Sea G un grupo, R un anillo y $\varphi\colon G \to R^\times$ un morfismo de grupos. Entonces existe un único morfismo de anillos

$$\overline{\varphi}\colon \mathbb{Z}G \to R$$

tal que $\overline{\varphi} = \varphi \circ i$.

A continuación veremos la propiedad universal del anillo de un monoide, que generaliza la del anillo de grupo.

Propiedad universal del anillo de grupo

El anillo de grupo $\mathbb{Z}G$ viene con un morfismo de grupos $i\colon G \to (\mathbb{Z}G)^\times$.

Vale la siguiente propiedad universal:

Sea G un grupo, R un anillo y $\varphi\colon G \to R^\times$ un morfismo de grupos. Entonces existe un único morfismo de anillos

$$\overline{\varphi}\colon \mathbb{Z}G \to R$$

tal que $\overline{\varphi} = \varphi \circ i$.

A continuación veremos la propiedad universal del anillo de un monoide, que generaliza la del anillo de grupo.

Si aún no pensaron o leyeron sobre esta generalización es un buen momento para pensar esto.

Propiedad universal del anillo de monoide

Sean R un anillo y G un monoide. El anillo $R[G]$ viene equipado con un morfismo de anillos $j\colon R \to R[G]$ y un morfismo de monoides $i\colon G \to (R[G], \times)$ tales que $f(r)$ y $\phi(g)$ conmutan para todos $r \in R$, $g \in G$.

Propiedad universal del anillo de monoide

Sean R un anillo y G un monoide. El anillo $R[G]$ viene equipado con un morfismo de anillos $j\colon R \to R[G]$ y un morfismo de monoides $i\colon G \to (R[G], \times)$ tales que $f(r)$ y $\phi(g)$ conmutan para todos $r \in R$, $g \in G$.

Vale la siguiente propiedad universal:

Propiedad universal del anillo de monoide

Sean R un anillo y G un monoide. El anillo $R[G]$ viene equipado con un morfismo de anillos $j\colon R \to R[G]$ y un morfismo de monoides $i\colon G \to (R[G], \times)$ tales que $f(r)$ y $\phi(g)$ conmutan para todos $r \in R$, $g \in G$.

Vale la siguiente propiedad universal:

Sea S un anillo equipado con un morfismo de anillos $f: R \to S$ y un morfismo de monoides $\phi\colon G \to (S, \times)$ tales que $\phi(g)$ conmuta con $f(r)$ para todos $R \in R$, $g \in G$. Entonces existe un único morfismo de anillos

$$\overline{f}\colon R[G] \to S$$

tal que $\overline{f}j = f$ y $\overline{f}i = \phi$.

Propiedad universal del anillo de monoide

Sean R un anillo y G un monoide. El anillo $R[G]$ viene equipado con un morfismo de anillos $j\colon R \to R[G]$ y un morfismo de monoides $i\colon G \to (R[G], \times)$ tales que $f(r)$ y $\phi(g)$ conmutan para todos $r \in R$, $g \in G$.

Vale la siguiente propiedad universal:

Sea S un anillo equipado con un morfismo de anillos $f: R \to S$ y un morfismo de monoides $\phi\colon G \to (S, \times)$ tales que $\phi(g)$ conmuta con $f(r)$ para todos $R \in R$, $g \in G$. Entonces existe un único morfismo de anillos

$$\overline{f}\colon R[G] \to S$$

tal que $\overline{f}j = f$ y $\overline{f}i = \phi$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, hook, "i"'] \arrow[rrr, bend left, "\phi"] & & & \\
 & RG \arrow[rr, dashed, "\overline{f}"] & & S \\
R \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Propiedad universal del anillo de polinomios no conmutativos

El anillo de polinomios no conmutativos $\mathbb{Z}\{x_1, \dots, x_n\}$ viene equipado con una función de conjuntos $i\colon \{x_1, \dots, x_n\} \to \mathbb{Z}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Propiedad universal del anillo de polinomios no conmutativos

El anillo de polinomios no conmutativos $\mathbb{Z}\{x_1, \dots, x_n\}$ viene equipado con una función de conjuntos $i\colon \{x_1, \dots, x_n\} \to \mathbb{Z}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Proposición

Sea R un anillo y $\varphi\colon \{x_1, \dots, x_n\} \to R$ una función de conjuntos. Entonces existe un único morfismo de anillos

$$f\colon \mathbb{Z}\{x_1, \dots, x_n\} \to R$$

tal que $f(x_i) = \varphi(x_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Propiedad universal del anillo de polinomios no conmutativos

El anillo de polinomios no conmutativos $\mathbb{Z}\{x_1, \dots, x_n\}$ viene equipado con una función de conjuntos $i\colon \{x_1, \dots, x_n\} \to \mathbb{Z}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Proposición

Sea R un anillo y $\varphi\colon \{x_1, \dots, x_n\} \to R$ una función de conjuntos. Entonces existe un único morfismo de anillos

$$f\colon \mathbb{Z}\{x_1, \dots, x_n\} \to R$$

tal que $f(x_i) = \varphi(x_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Ejercicio: probar la proposición utilizando lo anterior.

Propiedad universal del anillo de polinomios no conmutativos

El anillo de polinomios no conmutativos $\mathbb{Z}\{x_1, \ldots, x_n\}$ viene equipado con una función de conjuntos $i\colon \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{Z}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Proposición

Sea R un anillo y $\varphi\colon \{x_1, \ldots, x_n\} \to R$ una función de conjuntos. Entonces existe un único morfismo de anillos

$$f\colon \mathbb{Z}\{x_1, \ldots, x_n\} \to R$$

tal que $f(x_i) = \varphi(x_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Ejercicio: probar la proposición utilizando lo anterior.

Ejercicio: ¿Qué propiedad universal caracteriza al anillo de polinomios en n-variables?

Morfismos de anillos, ideales y cocientes

Observación

$f\colon k \to M_2(k)$ dado por $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(ab) = f(a)f(b)$ sin embargo NO es morfismo de anillos.

Morfismos de anillos, ideales y cocientes

Observación

$f\colon k \to M_2(k)$ dado por $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(ab) = f(a)f(b)$ sin embargo NO es morfismo de anillos.

Ejercicio

Hallar todos los ideales biláteros de $M_n(k)$. Hallar todos los ideales a izquierda de $M_n(k)$.

Morfismos de anillos, ideales y cocientes

Observación

$f : k \to M_2(k)$ dado por $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(ab) = f(a)f(b)$ sin embargo NO es morfismo de anillos.

Ejercicio

Hallar todos los ideales biláteros de $M_n(k)$. Hallar todos los ideales a izquierda de $M_n(k)$.

Ejercicio

Hallar el centro de $M_n(K)$.

Morfismos de anillos, ideales y cocientes

Observación

$f\colon k \to M_2(k)$ dado por $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(ab) = f(a)f(b)$ sin embargo NO es morfismo de anillos.

Ejercicio

Hallar todos los ideales biláteros de $M_n(k)$. Hallar todos los ideales a izquierda de $M_n(k)$.

Ejercicio

Hallar el centro de $M_n(K)$.

Ejercicio

Si $I \triangleleft R$ es un ideal bilátero. Probar que $M_n(I) \triangleleft M_n(R)$ es un ideal bilátero y que $M_n(R)/M_n(I)$ es isomorfo a $M_n(R/I)$.