Álgebra II Práctica (clase 8)

Guido Arnone

Universidad de Buenos Aires

12 de Mayo de 2020

Prerrequisitos

Para leer estas diapositivas se recomienda haber leído el apunte teórico hasta el Ejemplo 1.7.26 (inclusive).

Subgrupos de Sylow

Sea G un grupo finito, y p un primo que divide a su orden. Recordemos que un p-subgrupo de Sylow de G es un grupo de orden p^r con r la máxima potencia de p que divide a G.

Subgrupos de Sylow

Sea G un grupo finito, y p un primo que divide a su orden. Recordemos que un p-subgrupo de Sylow de G es un grupo de orden p^r con r la máxima potencia de p que divide a G.

Dicho de otra forma, si p es primo y $|G| = p^r \cdot m$ con $(m : p) = 1$, un p-subgrupo de Sylow es un grupo de orden p^r.

Teoremas de Sylow

Dado un grupo finito G, los teoremas de Sylow nos dicen que:

Teoremas de Sylow

Dado un grupo finito G, los teoremas de Sylow nos dicen que:

Teorema

Si p es un primo que divide al orden de G, existe un p-subgrupo de Sylow de G.

Teoremas de Sylow

Dado un grupo finito G, los teoremas de Sylow nos dicen que:

Teorema

Si p es un primo que divide al orden de G, existe un p-subgrupo de Sylow de G.

Teorema

Si P y Q son p-subgrupos de Sylow de G, existe $g \in G$ tal que $P = gQg^{-1}$.

Teoremas de Sylow

Dado un grupo finito G, los teoremas de Sylow nos dicen que:

Teorema

Si p es un primo que divide al orden de G, existe un p-subgrupo de Sylow de G.

Teorema

Si P y Q son p-subgrupos de Sylow de G, existe $g \in G$ tal que $P = gQg^{-1}$.

Teorema

Si r_p es la cantidad de p-subgrupos de Sylow de G, y $|G| = p^r \cdot m$ con $(m : p) = 1$, entonces $r_p \mid m$ y $r_p \equiv 1 \pmod{p}$.

Teoremas de Sylow (cont.)

El primer teorema de Sylow nos da una condición sobre la existencia de subgrupos de G (recordemos que en general si k divide al orden de G, esto no garantiza que en G existan subgrupos de orden k).

Teoremas de Sylow (cont.)

El primer teorema de Sylow nos da una condición sobre la existencia de subgrupos de G (recordemos que en general si k divide al orden de G, esto no garantiza que en G existan subgrupos de orden k).

Por otro lado, el segundo teorema de Sylow nos dice exactamente cuándo un p-subgrupo de Sylow es normal.

Teoremas de Sylow (cont.)

Corolario

Sea G un grupo finito y p un primo que divide al orden de G. Un p-subgrupo de Sylow P de G es normal si y sólo si $r_p = 1$, es decir, si es el único p-subgrupo de Sylow de G.

Demostración.

Veamos ambas implicaciones:

($\Rightarrow$) Supongamos que P es normal y sea Q otro p-Sylow de G. Por el segundo teorema de Sylow, existe $g \in G$ tal que $Q = gPg^{-1} = P$.

($\Leftarrow$) Sea $g \in G$. Como la conjugación $\mathrm{ad}(g)$ es un automorfismo de G, en particular es biyectiva, así que $|P| = |\mathrm{ad}(g)(P)| = |gPg^{-1}|$. Por lo tanto, el grupo gPg^{-1} es un p-Sylow y entonces por hipótesis $gPg^{-1} = P$.

$\square$

Subgrupos de Sylow y Grupos Simples

El tercer teorema de Sylow nos da información sobre la cantidad de p-subgrupos de Sylow. Por lo anterior, saber si $r_p = 1$ nos dice exactamente cuando existe un p-subgrupo de Sylow normal.

Subgrupos de Sylow y Grupos Simples

El tercer teorema de Sylow nos da información sobre la cantidad de p-subgrupos de Sylow. Por lo anterior, saber si $r_p = 1$ nos dice exactamente cuando existe un p-subgrupo de Sylow normal.

Dado que siempre existen p-subgrupos de Sylow, y tenemos herramientas para decidir si hay un p-Sylow normal, es útil estudiarlos a la hora de decidir si un grupo G no es simple (es decir, si tiene un subgrupo normal distinto de $\{1\}$ y G).

A veces el tercer teorema de Sylow nos dice directamente que existe cierto p para el cual $r_p = 1$. En otras ocasiones, para probar que $r_p = 1$ para algún p suponemos lo contrario, lo que nos da información sobre la cantidad de elementos de distintos órdenes del grupo, y a partir de esto llegamos a un absurdo.

Los ejemplos 1.7.24 y 1.7.25 del apunte teórico ilustran ambas situaciones.

Grupos Simples

Podemos caracterizar los morfismos que tienen como dominio a un grupo simple de la siguiente forma:

Ejercicio

Sea G un grupo simple. Si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos, o es trivial o es un monomorfismo.

Grupos Simples

Podemos caracterizar los morfismos que tienen como dominio a un grupo simple de la siguiente forma:

Ejercicio

Sea G un grupo simple. Si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos, o es trivial o es un monomorfismo.

Por otro lado, en este video teórico vimos que si G es un grupo y H un subgrupo, tenemos un morfismo $\rho : G \to S(G/H)$ dado por la acción $G \curvearrowright G/H$ de multiplicación a izquierda.

Grupos Simples

Si H no es todo G, entonces tomando $g \in G \setminus H$ vemos que

$$\rho(g)([1]) = g \cdot [1] = [g] \neq 1$$

y entonces $\rho(g) \neq \mathrm{id}$. Por lo tanto, el morfismo ρ no es el morfismo trivial y como G es simple debe ser un monomorfismo.

Grupos Simples

Si H no es todo G, entonces tomando $g \in G \setminus H$ vemos que

$$\rho(g)([1]) = g \cdot [1] = [g] \neq 1$$

y entonces $\rho(g) \neq \mathrm{id}$. Por lo tanto, el morfismo ρ no es el morfismo trivial y como G es simple debe ser un monomorfismo.

En particular, esto dice que $|G|$ divide a $[G : H]!$. En resumen,

Proposición

Sea G un grupo de orden n y H un subgrupo de índice $m \neq 1$. Si n no divide a $m!$, el grupo G no es simple. En particular, si $n > m!$ entonces G no es simple.

Grupos Simples (cont.)

Corolario

Sea G un grupo de orden $p^r \cdot m$ con $(m : p) = 1$ y $m \neq 1$. Si p^r no divide a $(m-1)!$, entonces G no es simple.

Grupos Simples (cont.)

Corolario

Sea G un grupo de orden $p^r \cdot m$ con $(m : p) = 1$ y $m \neq 1$. Si p^r no divide a $(m-1)!$, entonces G no es simple.

Demostración.

Sea $P \leq G$ un p-subgrupo de Sylow de G, que debe tener índice $[G : P] = \frac{|G|}{p^r} = m$. Si G fuera un grupo simple, tendríamos que $p^r \cdot m \mid m!$ y por lo tanto $p^r \mid (m-1)!$. □

Grupos Simples (cont.)

Corolario

Sea G un grupo de orden $p^r \cdot m$ con $(m : p) = 1$ y $m \neq 1$. Si p^r no divide a $(m-1)!$, entonces G no es simple.

Demostración.

Sea $P \leq G$ un p-subgrupo de Sylow de G, que debe tener índice $[G : P] = \frac{|G|}{p^r} = m$. Si G fuera un grupo simple, tendríamos que $p^r \cdot m \mid m!$ y por lo tanto $p^r \mid (m-1)!$. $\square$

Ejemplo

Un grupo de orden $13^2 \cdot 3 \cdot 7$ no es simple, pues 13^2 no divide a $20!$.

Productos Directos y Semidirectos Internos

Sea G un grupo y $H, K \leq G$ dos subgrupos. Supongamos además que:

(i) Todo elemento de $g \in G$ se escribe como $g = h \cdot k$ con $h \in H, k \in K$.

(ii) Los grupos H y K sólo se intersecan en $\{1\}$.

Productos Directos y Semidirectos Internos

Sea G un grupo y $H, K \leq G$ dos subgrupos. Supongamos además que:

(i) Todo elemento de $g \in G$ se escribe como $g = h \cdot k$ con $h \in H, k \in K$.

(ii) Los grupos H y K sólo se intersecan en $\{1\}$.

Observación

La condición (ii) nos dice que la escritura en (i) es única: si $g = h_1 k_1 = h_2 k_2$ con $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$, entonces

$$h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1} \in H \cap K = \{1\}$$

así que $h_1 = h_2$ y $k_1 = k_2$.

Productos Directos y Semidirectos Internos

Sea G un grupo y $H, K \leq G$ dos subgrupos. Supongamos además que:

(i) Todo elemento de $g \in G$ se escribe como $g = h \cdot k$ con $h \in H, k \in K$.

(ii) Los grupos H y K sólo se intersecan en $\{1\}$.

Observación

La condición (ii) nos dice que la escritura en (i) es única: si $g = h_1 k_1 = h_2 k_2$ con $h_1, h_2 \in H$ y $k_1, k_2 \in K$, entonces

$$h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1} \in H \cap K = \{1\}$$

así que $h_1 = h_2$ y $k_1 = k_2$.

Informalmente al menos, querríamos decir que G se obtiene a partir de "ensamblar" de alguna forma los grupos H y K.

Productos Directos y Semidirectos Internos

Proposición

Sea G un grupo. Si H, K son dos subgrupos normales en G que cumplen (i) e (ii), entonces $G \simeq H \times K$.

Productos Directos y Semidirectos Internos

Proposición

Sea G un grupo. Si H, K son dos subgrupos normales en G que cumplen (i) e (ii), entonces $G \simeq H \times K$.

Idea de la demostración.

- Probar que $\varphi : (h, k) \in H \times K \mapsto hk \in G$ es un morfismo de grupos.

Productos Directos y Semidirectos Internos

Proposición

Sea G un grupo. Si H, K son dos subgrupos normales en G que cumplen (i) e (ii), entonces $G \simeq H \times K$.

Idea de la demostración.

- Probar que $\varphi : (h, k) \in H \times K \mapsto hk \in G$ es un morfismo de grupos.
- La condición (i) nos dice que φ es un epimorfismo.

Productos Directos y Semidirectos Internos

Proposición

Sea G un grupo. Si H, K son dos subgrupos normales en G que cumplen (i) e (ii), entonces $G \simeq H \times K$.

Idea de la demostración.

- Probar que $\varphi : (h, k) \in H \times K \mapsto hk \in G$ es un morfismo de grupos.
- La condición (i) nos dice que φ es un epimorfismo.
- La condición (ii) nos dice que φ es monomorfismo.

$\square$

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Corolario

Si G es un grupo finito y H, K son subgrupos normales en G tales que $H \cap K = \{1\}$ y $|H| \cdot |K| = |G|$, entonces $H \times K \simeq G$.

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Corolario

Si G es un grupo finito y H, K son subgrupos normales en G tales que $H \cap K = \{1\}$ y $|H| \cdot |K| = |G|$, entonces $H \times K \simeq G$.

Demostración.

Observemos que HK es un grupo, pues tanto H como K son normales. Además H y K cumplen (i) y (ii) como subgrupos de HK, y son ambos normales allí. Por lo anterior, debe ser $H \times K \simeq HK$ y entonces

$$|HK| = |H| \cdot |K| = |G|.$$

A su vez HK está contenido en G, así que al tener la misma cantidad de elementos debe ser $G = HK \simeq H \times K$. □

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Los resultados anteriores dejan de ser ciertos si H o K no son normales.

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Los resultados anteriores dejan de ser ciertos si H o K no son normales.

Por ejemplo, en D_3 los subgrupos $\langle r \rangle$ y $\langle s \rangle$ se intersecan sólo en $\{1\}$ y todo elemento del grupo se puede escribir de la forma $r^i s^j$ para ciertos $i, j \in \mathbb{Z}$, pero $D_3 \not\simeq \langle r \rangle \times \langle s \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ pues este último es abeliano.

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Los resultados anteriores dejan de ser ciertos si H o K no son normales.

Por ejemplo, en D_3 los subgrupos $\langle r \rangle$ y $\langle s \rangle$ se intersecan sólo en $\{1\}$ y todo elemento del grupo se puede escribir de la forma $r^i s^j$ para ciertos $i, j \in \mathbb{Z}$, pero $D_3 \not\simeq \langle r \rangle \times \langle s \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ pues este último es abeliano.

Sería conveniente poder seguir representando a G como el producto de H y K *en algún sentido*, aún en este caso.

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Proposición

Sea G un grupo y H, K dos subgrupos de G que cumplen (i) e (ii). Si K es normal en G, existe un morfismo $\phi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ tal que $G \simeq K \rtimes_\phi H$.

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Proposición

Sea G un grupo y H, K dos subgrupos de G que cumplen (i) e (ii). Si K es normal en G, existe un morfismo $\phi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ tal que $G \simeq K \rtimes_\phi H$.

Idea de la Demostración.

Vamos a aprovechar el Ejercicio 1.7.13 del apunte teórico que resolvió Iván la clase pasada. Si $g \in G$ sabemos que hay una escritura única de g de la forma hk con $h \in H$ y $k \in K$, lo que nos permitirá probar que $p : g = hk \in G \mapsto h \in H$ es un morfismo de grupos.

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Proposición

Sea G un grupo y H, K dos subgrupos de G que cumplen (i) e (ii). Si K es normal en G, existe un morfismo $\phi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ tal que $G \simeq K \rtimes_\phi H$.

Idea de la Demostración.

Vamos a aprovechar el Ejercicio 1.7.13 del apunte teórico que resolvió Iván la clase pasada. Si $g \in G$ sabemos que hay una escritura única de g de la forma hk con $h \in H$ y $k \in K$, lo que nos permitirá probar que $p : g = hk \in G \mapsto h \in H$ es un morfismo de grupos. Notando ι_K, ι_H a las inclusiones de K y H, tendremos entonces una sucesión exacta corta

$$1 \to K \xrightarrow{\iota_K} G \xrightarrow{p} H \to 1,$$

que se parte pues $\iota_H p = id_H$. Usando el ítem (iv) del ejercicio mencionado, es $G \simeq K \rtimes_\phi H$ para algún morfismo ϕ. $\square$

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Esto nos dice que el producto semidirecto interno es isomorfo al externo.

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Esto nos dice que el producto semidirecto interno es isomorfo al externo.

Como para el producto directo, tenemos el siguiente resultado para grupos finitos:

Corolario

Sea G un grupo finito y H, K son subgrupos de G tales que $H \cap K = \{1\}$ y $|H| \cdot |K| = |G|$. Si K es normal, entonces $K \rtimes_\phi H \simeq G$ para algún automorfismo $\phi : H \to \mathrm{Aut}(K)$.

Productos Directos y Semidirectos Internos (cont.)

Esto nos dice que el producto semidirecto interno es isomorfo al externo.

Como para el producto directo, tenemos el siguiente resultado para grupos finitos:

Corolario

Sea G un grupo finito y H, K son subgrupos de G tales que $H \cap K = \{1\}$ y $|H| \cdot |K| = |G|$. Si K es normal, entonces $K \rtimes_\phi H \simeq G$ para algún automorfismo $\phi : H \to \mathrm{Aut}(K)$.

Demostración.

Al K ser normal en G, sabemos HK es un grupo, y K sigue siendo normal en HK. Además H y K cumplen (i) y (ii) como subgrupos de HK así que por lo anterior, debe ser $K \rtimes_\phi H \simeq HK$ para algún morfismo ϕ. En particular es $|HK| = |H| \cdot |K| = |G|$ y por lo tanto $G = HK \simeq K \rtimes_\phi H$. $\square$

Productos Directos y p-subgrupos de Sylow

Para terminar, veamos el siguiente resultado:

Proposición

Sea G un grupo finito tal que todo p-subgrupo de Sylow es normal. Si $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$ con $p_1, \cdots, p_n$ primos distintos y P_i es el único p_i-subgrupo de Sylow de G, entonces $G \simeq P_1 \times \cdots \times P_n$.

Productos Directos y p-subgrupos de Sylow

Para terminar, veamos el siguiente resultado:

Proposición

Sea G un grupo finito tal que todo p-subgrupo de Sylow es normal. Si $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$ con $p_1, \cdots, p_n$ primos distintos y P_i es el único p_i-subgrupo de Sylow de G, entonces $G \simeq P_1 \times \cdots \times P_n$.

Idea de la Demostración.

Inductivamente, podemos probar que si $H_1, \ldots, H_n$ son subgrupos normales de G con órdenes coprimos dos a dos, entonces $H_1 \cdots H_n$ es isomorfo a $H_1 \times \cdots \times H_n$.
Aplicando esto a $P_1, \ldots P_n$, debe ser $P_1 \cdots P_n \simeq P_1 \times \cdots \times P_n$. En particular $P_1 \cdots P_n$ tiene el mismo orden que G, así que

$$G = P_1 \cdots P_n \simeq P_1 \times \cdots \times P_n.$$

$\square$

Ejercicios

Con la proposición anterior pueden pensar los siguientes ejercicios:

Ejercicio

Clasificar todos los grupos abelianos finitos cuyo orden sea libre de cuadrados.

Ejercicio

Clasificar todos los grupos abelianos finitos de orden d^2 con d libre de cuadrados.