ÁLGEBRA II

Primer Cuatrimestre – 2020

Clases Prácticas

8 de Mayo

Ejercicio. Consideremos $\mathbb{R} \curvearrowright X = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \in C^1(\mathbb{R}),\ y' = y^2 + 38y\}$ dada por

$$(s \cdot y)(t) := y_s(t) = y(t+s).$$

(i) Verificar que $y_s \in X$ y que lo anterior define una acción.

(ii) Probar que $z \in \mathcal{O}_y$ si y sólo si existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $y(s) = z(0)$.
Sugerencia: usar el teorema de existencia y unicidad.

Resolución. Hacemos cada inciso por separado.

(i) Primero, notemos que $y_s \in X$ para cada $y \in X$ y $s \in \mathbb{R}$. Escribendo $\tau_s(x) = x + s$, es $y_s = y \circ \tau_s$. Esta es una composición de funciones suaves, así que y_s es suave y además

$$(y_s)' = (y' \circ \tau_s) \cdot (\tau_s)' = y' \circ \tau_s = (y^2 + 38y) \circ \tau_s.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$(y_s)'(t) = (y^2 + 38y)(t+s) = y^2(t+s) + 38y(t+s) = y_s^2 + 38y_s$$

como afirmamos.

Ahora debemos verificar que $0 \cdot y = y$ para cada $y \in X$, y que $(s+t) \cdot y = s \cdot (t \cdot y)$. Con la notación del enunciado, esto se traduce en probar que $y_0 = y$ e $y_{s+t} = (y_s)_t$ para cada $y \in X$ y $s, t \in \mathbb{R}$. Evaluando, efectivamente es

$$y_0(x) = y(x+0) = y(x)$$

y

$$(y_s)_t(x) = y_s(x+t) = y(x+t+s) = y(x+(s+t)) = y_{s+t}(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Observemos que $z \in \mathcal{O}_y$ si y sólo si existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $z = s \cdot y = y_s$.Tanto z como y_s satisfacen la misma ecuación diferencial, así que (bajo estas hipótesis donde hay existencia y unicidad) serán iguales si y sólo si coinciden en algún punto. Tomando $t = 0$, vemos que $z = y_s$ si y sólo si $z(0) = y_s(0) = y(0+s) = y(s)$.

■

Ejercicio. Sea $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright \mathbb{C}$ dada por $[0] \cdot z := z$ y $[1] \cdot z := \overline{z}$.

(i) Verificar que la anterior es una acción.

(ii) Calcular $\mathcal{O}_z$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Calcular los puntos fijos $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_2}$ de esta acción.

Resolución. La conjugación es una función biyectiva $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de orden 2 en $S(X)$. Por lo tanto, el morfismo de grupos

$$\varphi : n \in \mathbb{Z} \mapsto c^n = \overbrace{c \circ \cdots \circ c}^{n \text{ veces}} \in S(X)$$

pasa al cociente por $2\mathbb{Z} = \ker \varphi$ definiendo

$$\overline{\varphi} : [n] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \mapsto c^n \in S(X).$$

El morfismo $\overline{\varphi}$ nos dá entonces una acción $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright \mathbb{C}$, y es la del enunciado pues $[0] \cdot z = c^0(z) = id(z) = z$ y $[1] \cdot z = c^1(z) = c(z) = \overline{z}$. Esto concluye la verificación de **(i)**.

Veamos **(ii)**. Dado $z \in \mathbb{C}$, es $\mathcal{O}_z = \{0 \cdot z, 1 \cdot z\} = \{z, \overline{z}\}$. Si z es real, entonces la órbita sólo contiene a z ya que es su propio conjugado. En caso contrario, la órbita de z contiene a éste y a su conjugado, que son números complejos distintos.

Finalmente, un punto $z \in \mathbb{C}$ está fijo por la acción si $z = 0 \cdot z$ y $z = 1 \cdot z = \overline{z}$. La primera condición es cierta siempre, así que los puntos fijos son los números complejos que son su propio conjugado: vemos así que $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{R}$, lo que responde a **(iii)**. ■

Lema (de Burnside). Sea X un conjunto y G un grupo, ambos finitos. Dada una acción $G \curvearrowright X$, se tiene que

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Demostración. Observemos que $X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$ tiene el mismo cardinal que el conjunto $Y_g := \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\}$ para cada $g \in G$ fijo. Además, los conjuntos $(Y_g)_{g \in G}$ son disjuntos dos a dos, así que si definimos $Y := \bigsqcup_{g \in G} Y_g = \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x, g \in G\}$ es

$$|Y| = \sum_{g \in G} |Y_g| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Por otro lado, podemos escribir $Y = \bigsqcup_{x \in X} Z_x$ con $Z_x = \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\}$ para cada $x \in X$ fijo. Como Z_x tiene el mismo cardinal que $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$, es

$$\sum_{g \in G} |X^g| = |Y| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G| \cdot |G_x|}{|G|} = |G| \sum_{x \in X} [G : G_x]^{-1} = |G| \sum_{x \in X} |\mathcal{O}_x|^{-1}.$$

Para probar el lema, podemos ver entonces que $\sum_{x \in X} |\mathcal{O}_x|^{-1} = |X/G|$. El conjunto X tiene finitas órbitas, digamos $X/G = \{\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r\}$. Sabemos que X es unión disjunta de las mismas, y por lo tanto podemos calcular la suma anterior agrupando elementos de cada órbita.

Además, si $x \in \mathcal{O}_i$ entonces $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_i$ así que finalmente

$$\sum_{x \in X} |\mathcal{O}_x|^{-1} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{x \in \mathcal{O}_i} |\mathcal{O}_x|^{-1} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{x \in \mathcal{O}_i} |\mathcal{O}_i|^{-1} = \sum_{j=1}^{r} |\mathcal{O}_i||\mathcal{O}_i|^{-1} = r = |X/G|.$$

■

Ejercicio. Si $m \not\equiv 0$ en $\mathbb{Z}_p$, entonces $Y^{[m]}$ sólo contiene a las p-uplas con todas las coordenadas iguales. En particular, $|Y^{[m]}| = |X| = n$.

Resolución. Sea $y = (x_1, \ldots, x_p) \in Y^{[m]}$. Como $[m] \cdot y = y$, multiplicando sucesivamente por $[m]$ es $[km] \cdot y = y$ para cada $k \geq 1$.

Notando r_p al resto en la división por p, sabemos que $[km] = [r_p(km)]$ y $r_p(km) \in \{0, \ldots, p-1\}$. Por lo tanto debe ser $y = [r_p(km)] \cdot y$ para cada $k \geq 1$. Mirando la primera coordenada de estas p-uplas se sigue que

$$x_1 = x_{1+r_p(km)}$$

para cada $k \geq 1$.

Resta ver que $\{r_p(0), r_p(m), \ldots, r_p((p-1)m)\}$ son distintos dos a dos, pues en tal caso debe ser $\{r_p(0), \ldots, r_p((p-1)m+1)\} = \{0, \ldots, p-1\}$ y

$$\{x_1, \ldots, x_p\} = \{x_1, \ldots, x_{1+r_p((p-1)n)}\} = \{x_1\},$$

probando que $y = (x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_1)$.

Tomemos $0 \leq j \leq i \leq p-1$ tales que $r_p(im) = r_p(jm)$. Es entonces $im \equiv jm \pmod{p}$, o equivalentemente $m(i-j) \equiv 0 \pmod{p}$. Como $m \not\equiv 0 \pmod{p}$, esto implica $i - j \equiv 0 \pmod{p}$ y al ser $i - j \in \{0, \ldots, p-1\}$, vemos que $i = j$. ■

Ejercicio. Verificar que si $G \curvearrowright X$ es una acción e Y un conjunto, la aplicación

$$(f, g) \in Y^X \times G \mapsto (f \cdot g)(x) := f(g \cdot x)$$

define una acción a derecha.

Resolución. Hay que verificar dos cosas. En primer lugar, si $f \in Y^X$ es

$$(f \cdot 1)(x) = f(1 \cdot x) = f(x)$$

para cada $x \in X$, así que $f \cdot 1 = f$. Para terminar debemos mostrar que $f \cdot gh = (f \cdot g) \cdot h$. Veamos la igualdad al evaluar en cada $x \in X$. En efecto,

$$((f \cdot g) \cdot h)(x) = (f \cdot g)(h \cdot x) = f(g \cdot (h \cdot x)) = f(gh \cdot x) = (f \cdot gh)(x).$$

■

Teorema (Pólya). Sea $G \curvearrowright X$ una acción. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la cantidad de órbitas de k-coloreos de X es

$$\Pi_k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} k^{o(g)}.$$

Demostración. Por el lema de Burnside aplicado a la acción $[\![k]\!]^X \curvearrowleft G$ sabemos que

$$\Pi_k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |([\![k]\!]^X)^g|.$$

con $([\![k]\!]^X)^g = \{f : X \to [\![k]\!] : f \cdot g = f\}$. Basta probar entonces que $|([\![k]\!]^X)^g| = |k^{o(g)}|$.

Si $f : X \to [\![k]\!]$ es un elemento de $([\![k]\!]^X)^g$, entonces para cada $x \in X$ es

$$f(x) = (f \cdot g)(x) = f(g \cdot x).$$

Inductivamente, vemos que $f(x) = f(g^i \cdot x)$ para todo $i \geq 0$ así que f es constante en cada una de las órbitas $\mathscr{O}_x = \{x, g \cdot x, \ldots, g^{\operatorname{ord}(g)-1} \cdot x\}$ de la acción $\langle g \rangle \curvearrowright X$. Recíprocamente, si f es constante en cada órbita, como $gx \in \mathscr{O}_x$ luego $(f \cdot g)(x) = f(g \cdot x) = f(x)$ para cada $x \in X$.

Este argumento prueba que $([\![k]\!]^X)^g$ está en biyección con el conjunto de las funciones $f : X \to [\![k]\!]$ que son constantes en cada órbita de $\langle g \rangle \curvearrowright X$. Una tal función está determinada por elegir un color de los k posibles en cada una de las $o(g)$ órbitas, así que finalmente

$$|([\![k]\!]^X)^g| = k^{o(g)}.$$

como buscábamos. ■

Ejercicio. Sea $G \curvearrowright X$ una acción transitiva, con G un grupo finito y X un conjunto finito de cardinal mayor a 1. Probar que existe $g \in G$ tal que $g \cdot x \neq x$ para todo $x \in X$.

Resolución. Supongamos que no existe tal g, de forma que $X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$ es no vacío para cada $g \in G$. Por lo tanto, debe ser

$$\sum_{g \in G} |X^g| > |G|,$$

ya que $|X^e| = |X| > 1$ y $|X^g| \geq 1$ para todo $g \in G$. Por el lema de Burnside esto implica que

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| > 1,$$

y entonces debe haber más de una órbita. Pero esto es absurdo: la acción $G \curvearrowright X$ es transitiva. En consecuencia, necesariamente existe $g \in G$ tal que $g \cdot x \neq x$ para todo $x \in X$. ■