# Álgebra II Práctica (clase 6)

Iván Sadofschi Costa

Universidad de Buenos Aires

05 de Mayo de 2020

# Prerrequisitos

Para leer estas diapositivas se recomienda haber leído el apunte teórico hasta 1.7.18 (inclusive).

# ¿Cómo son los grupos abelianos de exponente $p$?

**Proposición**

*Sea* $(G,+)$ *un grupo abeliano finito de exponente* $p$*. Entonces*

$$G \simeq \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p.$$

# ¿Cómo son los grupos abelianos de exponente $p$?

**Proposición**

*Sea $(G,+)$ un grupo abeliano finito de exponente $p$. Entonces*

$$G \simeq \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p.$$

Antes de continuar convencerse de que probar esto no es obvio con las herramientas que tenemos.

# ¿Cómo son los grupos abelianos de exponente $p$?

**Proposición**

*Sea $(G, +)$ un grupo abeliano finito de exponente $p$. Entonces*

$$G \simeq \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p.$$

Antes de continuar convencerse de que probar esto no es obvio con las herramientas que tenemos.

Demostración: Consideramos $\cdot \colon \mathbb{Z}_p \times G \to G$ dada por $\lambda \cdot x = \underbrace{x + \ldots + x}_{\lambda \text{ veces}}$.

# ¿Cómo son los grupos abelianos de exponente $p$?

**Proposición**

*Sea* $(G, +)$ *un grupo abeliano finito de exponente* $p$. *Entonces*

$$G \simeq \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p.$$

Antes de continuar convencerse de que probar esto no es obvio con las herramientas que tenemos.

Demostración: Consideramos $\cdot : \mathbb{Z}_p \times G \to G$ dada por $\lambda \cdot x = \underbrace{x + \ldots + x}_{\lambda \text{ veces}}$.

Se puede comprobar que $(G, +, \cdot)$ es un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial (es buen momento para repasar la definición de espacio vectorial).

# ¿Cómo son los grupos abelianos de exponente $p$?

**Proposición**

*Sea $(G, +)$ un grupo abeliano finito de exponente $p$. Entonces*

$$G \simeq \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p.$$

Antes de continuar convencerse de que probar esto no es obvio con las herramientas que tenemos.

Demostración: Consideramos $\cdot : \mathbb{Z}_p \times G \to G$ dada por $\lambda \cdot x = \underbrace{x + \ldots + x}_{\lambda \text{ veces}}$.

Se puede comprobar que $(G, +, \cdot)$ es un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial (es buen momento para repasar la definición de espacio vectorial).

Por lo tanto si $n = \dim_{\mathbb{Z}_p}(G)$ tenemos que $G \simeq (\mathbb{Z}_p)^n$ como $\mathbb{Z}_p$-espacios vectoriales (en particular como grupos).

# Un lema muy útil

Si aún no hicieron este ejercicio es buen momento de parar a pensarlo.

**Lema**

*Sea $H \leq G$ de índice 2. Entonces $H \triangleleft G$.*

# Un lema muy útil

Si aún no hicieron este ejercicio es buen momento de parar a pensarlo.

**Lema**

*Sea $H \leq G$ de índice 2. Entonces $H \triangleleft G$.*

Idea: Hay dos cosets $1 \cdot H$ (los elementos de $G$ que están en $H$) y $g \cdot H$ (los elementos de $G$ que no están en $H$).

# Un lema muy útil

Si aún no hicieron este ejercicio es buen momento de parar a pensarlo.

**Lema**

*Sea $H \leq G$ de índice 2. Entonces $H \triangleleft G$.*

Idea: Hay dos cosets $1 \cdot H$ (los elementos de $G$ que están en $H$) y $g \cdot H$ (los elementos de $G$ que no están en $H$).

El producto de dos cosas de $H$ está en $H$. El producto de algo que no está en $H$ y algo que está en $H$ no puede estar en $H$.

# Un lema muy útil

Si aún no hicieron este ejercicio es buen momento de parar a pensarlo.

**Lema**

*Sea $H \leq G$ de índice 2. Entonces $H \lhd G$.*

Idea: Hay dos cosets $1 \cdot H$ (los elementos de $G$ que están en $H$) y $g \cdot H$ (los elementos de $G$ que no están en $H$).

El producto de dos cosas de $H$ está en $H$. El producto de algo que no está en $H$ y algo que está en $H$ no puede estar en $H$.

Luego el producto de dos cosas que no están en $H$ debe estar en $H$ (pensar por qué!).

# Un lema muy útil

Si aún no hicieron este ejercicio es buen momento de parar a pensarlo.

**Lema**

*Sea $H \leq G$ de índice 2. Entonces $H \triangleleft G$.*

Idea: Hay dos cosets $1 \cdot H$ (los elementos de $G$ que están en $H$) y $g \cdot H$ (los elementos de $G$ que no están en $H$).

El producto de dos cosas de $H$ está en $H$. El producto de algo que no está en $H$ y algo que está en $H$ no puede estar en $H$.

Luego el producto de dos cosas que no están en $H$ debe estar en $H$ (pensar por qué!).

Separando en casos (según si $g \in H$ o no) deducimos que $ghg^{-1}$ está en $H$ para todo $h \in H$, $g \in G$.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica

El siguiente ejercicio es sobre el producto semidirecto "externo".

## Ejercicio

*Sean $G$, $H$ grupos y sea $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ un morfismo. Llamamos $H \rtimes_\varphi G$ al producto cartesiano $H \times G$ equipado con el siguiente producto*

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1\varphi(g_1)(h_2), g_1g_2).$$

*i) Probar que $H \rtimes_\varphi G$ es un grupo.*
*ii) Probar que $G_1 = \{1\} \times G$ es un subgrupo de $H \rtimes_\varphi G$ y que $H_1 = H \times \{1\} \lhd H \rtimes_\varphi G$.*
*iii) Probar que $H \rtimes_\varphi G$ es el producto semidirecto de $H_1$ y $G_1$.*
*iv) Sea*

$$1 \to H \to E \to G \to 1$$

*una sucesión exacta que se parte. Probar que existe $\varphi\colon G \to Aut(H)$ tal que $E \simeq H \rtimes_\varphi G$.*

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución)

Como siempre, si no pensaron el ejercicio es buen momento de hacerlo!

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución)

Como siempre, si no pensaron el ejercicio es buen momento de hacerlo!

Para el inciso (i) lo primero es verificar que el producto está bien definido (o sea que es un elemento de $H \times G$. Esto es bastante inmediato.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución)

Como siempre, si no pensaron el ejercicio es buen momento de hacerlo!

Para el inciso (i) lo primero es verificar que el producto está bien definido (o sea que es un elemento de $H \times G$. Esto es bastante inmediato.

Luego debemos verificar que hay neutro. El neutro es el $(1, 1)$. La cuenta es fácil, pero hay que hacerla de los dos lados! Notar que la cuenta a izquierda es diferente de la cuenta a derecha.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución)

Como siempre, si no pensaron el ejercicio es buen momento de hacerlo!

Para el inciso (i) lo primero es verificar que el producto está bien definido (o sea que es un elemento de $H \times G$. Esto es bastante inmediato.

Luego debemos verificar que hay neutro. El neutro es el $(1, 1)$. La cuenta es fácil, pero hay que hacerla de los dos lados! Notar que la cuenta a izquierda es diferente de la cuenta a derecha.

Para ver que hay inversos primero tenemos que darnos cuenta cual es el inverso. Despejando podemos ver que el inverso de $(h_1, g_1)$ tiene que ser $\left(\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}), g_1^{-1}\right)$.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución)

Como siempre, si no pensaron el ejercicio es buen momento de hacerlo!

Para el inciso (i) lo primero es verificar que el producto está bien definido (o sea que es un elemento de $H \times G$. Esto es bastante inmediato.

Luego debemos verificar que hay neutro. El neutro es el $(1, 1)$. La cuenta es fácil, pero hay que hacerla de los dos lados! Notar que la cuenta a izquierda es diferente de la cuenta a derecha.

Para ver que hay inversos primero tenemos que darnos cuenta cual es el inverso. Despejando podemos ver que el inverso de $(h_1, g_1)$ tiene que ser $\left(\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}), g_1^{-1}\right)$.

Como antes, hay que hacer la cuenta a ambos lados! Son verificaciones distintas.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución)

Como siempre, si no pensaron el ejercicio es buen momento de hacerlo!

Para el inciso (i) lo primero es verificar que el producto está bien definido (o sea que es un elemento de $H \times G$. Esto es bastante inmediato.

Luego debemos verificar que hay neutro. El neutro es el $(1, 1)$. La cuenta es fácil, pero hay que hacerla de los dos lados! Notar que la cuenta a izquierda es diferente de la cuenta a derecha.

Para ver que hay inversos primero tenemos que darnos cuenta cual es el inverso. Despejando podemos ver que el inverso de $(h_1, g_1)$ tiene que ser $\left(\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}), g_1^{-1}\right)$.

Como antes, hay que hacer la cuenta a ambos lados! Son verificaciones distintas.

Queda verificar la asociatividad. Es una cuenta larga y hay que tener paciencia...

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Asociando de una forma:

$$((h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2)) \cdot (h_3, g_3) =$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Asociando de una forma:

$$((h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2)) \cdot (h_3, g_3) = (h_1 \varphi(g_1)(h_2), g_1 g_2) \cdot (h_3, g_3)$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Asociando de una forma:

$$\begin{aligned}((h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2)) \cdot (h_3, g_3) &= (h_1 \varphi(g_1)(h_2), g_1 g_2) \cdot (h_3, g_3) \\ &= (h_1 \varphi(g_1)(h_2) \varphi(g_1 g_2)(h_3), g_1 g_2 g_3)\end{aligned}$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Asociando de una forma:

$$\begin{aligned}((h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2)) \cdot (h_3, g_3) &= (h_1 \varphi(g_1)(h_2), g_1 g_2) \cdot (h_3, g_3) \\ &= (h_1 \varphi(g_1)(h_2) \varphi(g_1 g_2)(h_3), g_1 g_2 g_3)\end{aligned}$$

Asociando de la otra forma:

$$(h_1, g_1) \cdot ((h_2, g_2) \cdot (h_3, g_3)) =$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Asociando de una forma:

$$\begin{aligned}((h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2)) \cdot (h_3, g_3) &= (h_1\varphi(g_1)(h_2), g_1g_2) \cdot (h_3, g_3) \\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2)\varphi(g_1g_2)(h_3), g_1g_2g_3)\end{aligned}$$

Asociando de la otra forma:

$$(h_1, g_1) \cdot ((h_2, g_2) \cdot (h_3, g_3)) = (h_1, g_1) \cdot (h_2\varphi(g_2)(h_3), g_2g_3)$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Asociando de una forma:

$$
\begin{aligned}
((h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2)) \cdot (h_3, g_3) &= (h_1\varphi(g_1)(h_2), g_1g_2) \cdot (h_3, g_3) \\
&= (h_1\varphi(g_1)(h_2)\varphi(g_1g_2)(h_3), g_1g_2g_3)
\end{aligned}
$$

Asociando de la otra forma:

$$
\begin{aligned}
(h_1, g_1) \cdot ((h_2, g_2) \cdot (h_3, g_3)) &= (h_1, g_1) \cdot (h_2\varphi(g_2)(h_3), g_2g_3) \\
&= (h_1\varphi(g_1)(h_2\varphi(g_2)(h_3)), g_1, g_2g_3)
\end{aligned}
$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Asociando de una forma:

$$\begin{aligned}((h_1,g_1)\cdot(h_2,g_2))\cdot(h_3,g_3) &= (h_1\varphi(g_1)(h_2), g_1g_2)\cdot(h_3,g_3)\\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2)\varphi(g_1g_2)(h_3), g_1g_2g_3)\end{aligned}$$

Asociando de la otra forma:

$$\begin{aligned}(h_1,g_1)\cdot((h_2,g_2)\cdot(h_3,g_3)) &= (h_1,g_1)\cdot(h_2\varphi(g_2)(h_3), g_2g_3)\\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2\varphi(g_2)(h_3)), g_1, g_2g_3)\\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2)\varphi(g_1)(\varphi(g_2)(h_3)), g_1g_2g_3)\end{aligned}$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Asociando de una forma:

$$\begin{aligned}((h_1,g_1)\cdot(h_2,g_2))\cdot(h_3,g_3) &= (h_1\varphi(g_1)(h_2),g_1g_2)\cdot(h_3,g_3)\\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2)\varphi(g_1g_2)(h_3),g_1g_2g_3)\end{aligned}$$

Asociando de la otra forma:

$$\begin{aligned}(h_1,g_1)\cdot((h_2,g_2)\cdot(h_3,g_3)) &= (h_1,g_1)\cdot(h_2\varphi(g_2)(h_3),g_2g_3)\\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2\varphi(g_2)(h_3)),g_1,g_2g_3)\\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2)\varphi(g_1)(\varphi(g_2)(h_3)),g_1g_2g_3)\\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2)\varphi(g_1g_2)(h_3),g_1g_2g_3)\end{aligned}$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Asociando de una forma:

$$\begin{aligned}((h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2)) \cdot (h_3, g_3) &= (h_1\varphi(g_1)(h_2), g_1 g_2) \cdot (h_3, g_3) \\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2)\varphi(g_1 g_2)(h_3), g_1 g_2 g_3)\end{aligned}$$

Asociando de la otra forma:

$$\begin{aligned}(h_1, g_1) \cdot ((h_2, g_2) \cdot (h_3, g_3)) &= (h_1, g_1) \cdot (h_2\varphi(g_2)(h_3), g_2 g_3) \\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2\varphi(g_2)(h_3)), g_1, g_2 g_3) \\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2)\varphi(g_1)(\varphi(g_2)(h_3)), g_1 g_2 g_3) \\ &= (h_1\varphi(g_1)(h_2)\varphi(g_1 g_2)(h_3), g_1 g_2 g_3)\end{aligned}$$

Luego el producto en $H \rtimes_\varphi G$ es asociativo. Esto completa el inciso (i).

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (ii), queremos ver que $H_1$ y $G_1$ son subgrupos. Basta ver que son cerrados por inversos y por el producto (ya que son no vacíos). Podemos aprovechar que ya sabemos quién es el inverso de un elemento $(h, g)$.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (ii), queremos ver que $H_1$ y $G_1$ son subgrupos. Basta ver que son cerrados por inversos y por el producto (ya que son no vacíos). Podemos aprovechar que ya sabemos quién es el inverso de un elemento $(h, g)$. Estas cuentas quedan de ejercicio.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (ii), queremos ver que $H_1$ y $G_1$ son subgrupos. Basta ver que son cerrados por inversos y por el producto (ya que son no vacíos). Podemos aprovechar que ya sabemos quién es el inverso de un elemento $(h, g)$. Estas cuentas quedan de ejercicio.

Para ver la normalidad de $H_1$ hacemos la siguiente cuenta

$$(h_1, g_1) \cdot (h, 1) \cdot (h_1, g_1)^{-1}$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (ii), queremos ver que $H_1$ y $G_1$ son subgrupos. Basta ver que son cerrados por inversos y por el producto (ya que son no vacíos). Podemos aprovechar que ya sabemos quién es el inverso de un elemento $(h, g)$. Estas cuentas quedan de ejercicio.

Para ver la normalidad de $H_1$ hacemos la siguiente cuenta

$$(h_1, g_1) \cdot (h, 1) \cdot (h_1, g_1)^{-1} = (h_1, g_1) \cdot (h, 1) \cdot (\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}), g_1^{-1})$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (ii), queremos ver que $H_1$ y $G_1$ son subgrupos. Basta ver que son cerrados por inversos y por el producto (ya que son no vacíos). Podemos aprovechar que ya sabemos quién es el inverso de un elemento $(h, g)$. Estas cuentas quedan de ejercicio.

Para ver la normalidad de $H_1$ hacemos la siguiente cuenta

$$\begin{aligned}(h_1, g_1) \cdot (h, 1) \cdot (h_1, g_1)^{-1} &= (h_1, g_1) \cdot (h, 1) \cdot (\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}), g_1^{-1}) \\ &= (h_1\varphi(g_1)(h), g_1) \cdot (\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}), g_1^{-1})\end{aligned}$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (ii), queremos ver que $H_1$ y $G_1$ son subgrupos. Basta ver que son cerrados por inversos y por el producto (ya que son no vacíos). Podemos aprovechar que ya sabemos quién es el inverso de un elemento $(h,g)$. Estas cuentas quedan de ejercicio.

Para ver la normalidad de $H_1$ hacemos la siguiente cuenta

$$\begin{aligned}
(h_1,g_1)\cdot(h,1)\cdot(h_1,g_1)^{-1} &= (h_1,g_1)\cdot(h,1)\cdot(\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}),g_1^{-1}) \\
&= (h_1\varphi(g_1)(h),g_1)\cdot(\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}),g_1^{-1}) \\
&= (h_1\varphi(g_1)(h)\varphi(g_1)(\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1})),g_1g_1^{-1})
\end{aligned}$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (ii), queremos ver que $H_1$ y $G_1$ son subgrupos. Basta ver que son cerrados por inversos y por el producto (ya que son no vacíos). Podemos aprovechar que ya sabemos quién es el inverso de un elemento $(h, g)$. Estas cuentas quedan de ejercicio.

Para ver la normalidad de $H_1$ hacemos la siguiente cuenta

$$\begin{aligned}
(h_1, g_1) \cdot (h, 1) \cdot (h_1, g_1)^{-1} &= (h_1, g_1) \cdot (h, 1) \cdot (\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}), g_1^{-1}) \\
&= (h_1 \varphi(g_1)(h), g_1) \cdot (\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}), g_1^{-1}) \\
&= (h_1 \varphi(g_1)(h) \varphi(g_1)(\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1})), g_1 g_1^{-1}) \\
&= (h_1 \varphi(g_1)(h) h_1^{-1}, 1) \in H_1
\end{aligned}$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (ii), queremos ver que $H_1$ y $G_1$ son subgrupos. Basta ver que son cerrados por inversos y por el producto (ya que son no vacíos). Podemos aprovechar que ya sabemos quién es el inverso de un elemento $(h, g)$. Estas cuentas quedan de ejercicio.

Para ver la normalidad de $H_1$ hacemos la siguiente cuenta

$$\begin{aligned}
(h_1, g_1) \cdot (h, 1) \cdot (h_1, g_1)^{-1} &= (h_1, g_1) \cdot (h, 1) \cdot (\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}), g_1^{-1}) \\
&= (h_1\varphi(g_1)(h), g_1) \cdot (\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1}), g_1^{-1}) \\
&= (h_1\varphi(g_1)(h)\varphi(g_1)(\varphi(g_1^{-1})(h_1^{-1})), g_1 g_1^{-1}) \\
&= (h_1\varphi(g_1)(h)h_1^{-1}, 1) \in H_1
\end{aligned}$$

Luego $H_1 \triangleleft H \rtimes_\varphi G$.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (iii) de acuerdo a la definición dada en la Sección 1.3, deberemos verificar:

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (iii) de acuerdo a la definición dada en la Sección 1.3, deberemos verificar:

- $H_1 \lhd H \rtimes_\varphi G$ (vimos esto en el inciso anterior)

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (iii) de acuerdo a la definición dada en la Sección 1.3, deberemos verificar:

- $H_1 \triangleleft H \rtimes_\varphi G$ (vimos esto en el inciso anterior)
- $H_1 G_1 = H \rtimes_\varphi G$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (iii) de acuerdo a la definición dada en la Sección 1.3, deberemos verificar:

- $H_1 \triangleleft H \rtimes_\varphi G$ (vimos esto en el inciso anterior)
- $H_1 G_1 = H \rtimes_\varphi G$
- $H_1 \cap G_1 = 1$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Para el inciso (iii) de acuerdo a la definición dada en la Sección 1.3, deberemos verificar:

- $H_1 \triangleleft H \rtimes_\varphi G$ (vimos esto en el inciso anterior)
- $H_1 G_1 = H \rtimes_\varphi G$
- $H_1 \cap G_1 = 1$

Todo esto es fácil de chequear.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Queda ver el inciso (iv). Que la sucesión

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

se parta significa que existe un morfismo $s \colon G \to E$ tal que $ps = id_G$ es la identidad.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Queda ver el inciso (iv). Que la sucesión

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

se parta significa que existe un morfismo $s\colon G \to E$ tal que $ps = id_G$ es la identidad.

Para entender como elegir $\varphi$, viene bien notar que

$$1 \to H \xrightarrow{i} H \rtimes_{\varphi} G \xrightarrow{p} G \to 1$$

(donde $i(h) = (h, 1)$, $p(h, g) = g$) se parte con el morfismo $s(g) = (1, g)$.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Queda ver el inciso (iv). Que la sucesión

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

se parta significa que existe un morfismo $s\colon G \to E$ tal que $ps = id_G$ es la identidad.

Para entender como elegir $\varphi$, viene bien notar que

$$1 \to H \xrightarrow{i} H \rtimes_\varphi G \xrightarrow{p} G \to 1$$

(donde $i(h) = (h, 1)$, $p(h, g) = g$) se parte con el morfismo $s(g) = (1, g)$.

Notemos que

$$(1, g)(h, 1) = (\varphi(g)(h), g) = (\varphi(g)(h), g) = (\varphi(g)(h), 1)(1, g).$$

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Queda ver el inciso (iv). Que la sucesión

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

se parta significa que existe un morfismo $s\colon G \to E$ tal que $ps = id_G$ es la identidad.
Para entender como elegir $\varphi$, viene bien notar que

$$1 \to H \xrightarrow{i} H \rtimes_{\varphi} G \xrightarrow{p} G \to 1$$

(donde $i(h) = (h, 1)$, $p(h, g) = g$) se parte con el morfismo $s(g) = (1, g)$.

Notemos que

$$(1, g)(h, 1) = (\varphi(g)(h), g) = (\varphi(g)(h), g) = (\varphi(g)(h), 1)(1, g).$$

Reordenando $(1, g)(h, 1)(1, g)^{-1} = (\varphi(g)(h), 1)$.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Queda ver el inciso (iv). Que la sucesión

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

se parta significa que existe un morfismo $s\colon G \to E$ tal que $ps = id_G$ es la identidad.

Para entender como elegir $\varphi$, viene bien notar que

$$1 \to H \xrightarrow{i} H \rtimes_\varphi G \xrightarrow{p} G \to 1$$

(donde $i(h) = (h, 1)$, $p(h, g) = g$) se parte con el morfismo $s(g) = (1, g)$.

Notemos que

$$(1, g)(h, 1) = (\varphi(g)(h), g) = (\varphi(g)(h), g) = (\varphi(g)(h), 1)(1, g).$$

Reordenando $(1, g)(h, 1)(1, g)^{-1} = (\varphi(g)(h), 1)$.

O sea que $i(\varphi(g)(h))$ es conjugar $i(h)$ por $s(g)$.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Entonces dada

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

y un morfismo $s\colon G \to E$ que parte la sucesión exacta corta, definimos $\varphi(g)\colon H \to H$ del siguiente modo: $\varphi(g)(h)$ es (la preimagen por $i$ de [1]) $s(g)i(h)s(g)^{-1}$.

[1] Los paréntesis están porque identificando $H$ con su imagen por $i$ la aclaración no es necesaria.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Entonces dada

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

y un morfismo $s\colon G \to E$ que parte la sucesión exacta corta, definimos $\varphi(g)\colon H \to H$ del siguiente modo: $\varphi(g)(h)$ es (la preimagen por $i$ de [1]) $s(g)i(h)s(g)^{-1}$.

Cosas para verificar:

- Que $\varphi(g)$ esté bien definido: hay que ver que $s(g)i(h)s(g)^{-1}$ está en la imagen de $i$ (en $H$ si hacemos la identificación).

[1] Los paréntesis están porque identificando $H$ con su imagen por $i$ la aclaración no es necesaria.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Entonces dada

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

y un morfismo $s\colon G \to E$ que parte la sucesión exacta corta, definimos $\varphi(g)\colon H \to H$ del siguiente modo: $\varphi(g)(h)$ es (la preimagen por $i$ de [1]) $s(g)i(h)s(g)^{-1}$.

Cosas para verificar:

- Que $\varphi(g)$ esté bien definido: hay que ver que $s(g)i(h)s(g)^{-1}$ está en la imagen de $i$ (en $H$ si hacemos la identificación). Además hay que ver que $\varphi(g) \in \mathrm{Aut}(H)$.

[1] Los paréntesis están porque identificando $H$ con su imagen por $i$ la aclaración no es necesaria.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Entonces dada

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

y un morfismo $s\colon G \to E$ que parte la sucesión exacta corta, definimos $\varphi(g)\colon H \to H$ del siguiente modo: $\varphi(g)(h)$ es (la preimagen por $i$ de [1]) $s(g)i(h)s(g)^{-1}$.

Cosas para verificar:

- Que $\varphi(g)$ esté bien definido: hay que ver que $s(g)i(h)s(g)^{-1}$ está en la imagen de $i$ (en $H$ si hacemos la identificación). Además hay que ver que $\varphi(g) \in \mathrm{Aut}(H)$.
- Que $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ sea un morfismo.

[1] Los paréntesis están porque identificando $H$ con su imagen por $i$ la aclaración no es necesaria.

# El Ejercicio 1.7.13 de la teórica (solución, cont.)

Entonces dada

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

y un morfismo $s\colon G \to E$ que parte la sucesión exacta corta, definimos $\varphi(g)\colon H \to H$ del siguiente modo: $\varphi(g)(h)$ es (la preimagen por $i$ de [1]) $s(g)i(h)s(g)^{-1}$.

Cosas para verificar:

- Que $\varphi(g)$ esté bien definido: hay que ver que $s(g)i(h)s(g)^{-1}$ está en la imagen de $i$ (en $H$ si hacemos la identificación). Además hay que ver que $\varphi(g) \in \mathrm{Aut}(H)$.
- Que $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ sea un morfismo.
- Que $E \simeq H \rtimes_\varphi G$. Para esto hay que definir el isomorfismo. Lo más sencillo es definir $f\colon H \rtimes_\varphi G \to E$ por $f(h, g) = i(h)s(g)$. Queda verificar que es morfismo y que es biyectivo.

[1] Los paréntesis están porque identificando $H$ con su imagen por $i$ la aclaración no es necesaria.