Álgebra II Práctica (clase 5)

Guido Arnone

Universidad de Buenos Aires

28 de Abril de 2020

Prerrequisitos

Para leer estas diapositivas se recomienda haber leído el apunte teórico hasta la Sección 1.6.

Sistemas de Generadores

Vamos a relacionar las definiciones de grupo normal y cociente con la noción de sistema de generadores de un grupo.

Sistemas de Generadores

Vamos a relacionar las definiciones de grupo normal y cociente con la noción de sistema de generadores de un grupo.

Recordemos que dado un grupo G, un subconjunto $S \subset G$ es un sistema de generadores de G si todo elemento de G se puede escribir como un producto de elementos de S o sus inversos.

Sistemas de Generadores

Vamos a relacionar las definiciones de grupo normal y cociente con la noción de sistema de generadores de un grupo.

Recordemos que dado un grupo G, un subconjunto $S \subset G$ es un sistema de generadores de G si todo elemento de G se puede escribir como un producto de elementos de S o sus inversos. Concretamente, si $g \in G$ entonces existen $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}.$$

Sistemas de Generadores

Vamos a relacionar las definiciones de grupo normal y cociente con la noción de sistema de generadores de un grupo.

Recordemos que dado un grupo G, un subconjunto $S \subset G$ es un sistema de generadores de G si todo elemento de G se puede escribir como un producto de elementos de S o sus inversos. Concretamente, si $g \in G$ entonces existen $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}.$$

Equivalentemente, es $G = \langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H \leq G} H$.

Sistemas de Generadores

Vamos a relacionar las definiciones de grupo normal y cociente con la noción de sistema de generadores de un grupo.

Recordemos que dado un grupo G, un subconjunto $S \subset G$ es un sistema de generadores de G si todo elemento de G se puede escribir como un producto de elementos de S o sus inversos. Concretamente, si $g \in G$ entonces existen $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}.$$

Equivalentemente, es $G = \langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H \leq G} H$. Decimos también que G está generado por S.

Sistemas de Generadores

Vamos a relacionar las definiciones de grupo normal y cociente con la noción de sistema de generadores de un grupo.

Recordemos que dado un grupo G, un subconjunto $S \subset G$ es un sistema de generadores de G si todo elemento de G se puede escribir como un producto de elementos de S o sus inversos. Concretamente, si $g \in G$ entonces existen $s_1, \dots, s_n \in S$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}.$$

Equivalentemente, es $G = \langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H \leq G} H$. Decimos también que G está generado por S. Por ejemplo, el grupo S_n está generado por las transposiciones y el diedral D_n por los elementos que denotamos r y s.

Sistemas de Generadores - Grupos Normales

Trabajar con generadores nos permite dar información sobre todo el grupo G analizando sólo lo que sucede para algunos elementos. Por ejemplo,

Sistemas de Generadores - Grupos Normales

Trabajar con generadores nos permite dar información sobre todo el grupo G analizando sólo lo que sucede para algunos elementos. Por ejemplo,

Proposición

Sea G un grupo y S un conjunto de generadores. Un subgrupo H de G es normal si y solo si $sHs^{-1} \subset H$ y $s^{-1}Hs \subset H$ para todo $s \in S$.

Sistemas de Generadores - Grupos Normales

Trabajar con generadores nos permite dar información sobre todo el grupo G analizando sólo lo que sucede para algunos elementos. Por ejemplo,

Proposición

Sea G un grupo y S un conjunto de generadores. Un subgrupo H de G es normal si y solo si $sHs^{-1} \subset H$ y $s^{-1}Hs \subset H$ para todo $s \in S$.

Demostración.

Si H es normal, ya sabemos que $gHg^{-1} \subset H$ para todo $g \in G$, lo que debemos ver es la recíproca.

Sistemas de Generadores - Grupos Normales

Trabajar con generadores nos permite dar información sobre todo el grupo G analizando sólo lo que sucede para algunos elementos. Por ejemplo,

Proposición

Sea G un grupo y S un conjunto de generadores. Un subgrupo H de G es normal si y solo si $sHs^{-1} \subset H$ y $s^{-1}Hs \subset H$ para todo $s \in S$.

Demostración.

Si H es normal, ya sabemos que $gHg^{-1} \subset H$ para todo $g \in G$, lo que debemos ver es la recíproca. Tomemos $h \in H, g \in G$ y escribamos $g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$.

Sistemas de Generadores - Grupos Normales

Trabajar con generadores nos permite dar información sobre todo el grupo G analizando sólo lo que sucede para algunos elementos. Por ejemplo,

Proposición

Sea G un grupo y S un conjunto de generadores. Un subgrupo H de G es normal si y solo si $sHs^{-1} \subset H$ y $s^{-1}Hs \subset H$ para todo $s \in S$.

Demostración.

Si H es normal, ya sabemos que $gHg^{-1} \subset H$ para todo $g \in G$, lo que debemos ver es la recíproca. Tomemos $h \in H, g \in G$ y escribamos $g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$. En estos términos, debe ser $g^{-1} = s_n^{-\varepsilon_n} \cdots s_1^{-\varepsilon_1}$.

Sistemas de Generadores - Grupos Normales

Trabajar con generadores nos permite dar información sobre todo el grupo G analizando sólo lo que sucede para algunos elementos. Por ejemplo,

Proposición

Sea G un grupo y S un conjunto de generadores. Un subgrupo H de G es normal si y solo si $sHs^{-1} \subset H$ y $s^{-1}Hs \subset H$ para todo $s \in S$.

Demostración.

Si H es normal, ya sabemos que $gHg^{-1} \subset H$ para todo $g \in G$, lo que debemos ver es la recíproca. Tomemos $h \in H, g \in G$ y escribamos $g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$. En estos términos, debe ser $g^{-1} = s_n^{-\varepsilon_n} \cdots s_1^{-\varepsilon_1}$. Ahora, por hipótesis $h_1 = s_n^{\varepsilon_n} h s_n^{-\varepsilon_n}$ es un elemento de H.

Sistemas de Generadores - Grupos Normales

Trabajar con generadores nos permite dar información sobre todo el grupo G analizando sólo lo que sucede para algunos elementos. Por ejemplo,

Proposición

Sea G un grupo y S un conjunto de generadores. Un subgrupo H de G es normal si y solo si $sHs^{-1} \subset H$ y $s^{-1}Hs \subset H$ para todo $s \in S$.

Demostración.

Si H es normal, ya sabemos que $gHg^{-1} \subset H$ para todo $g \in G$, lo que debemos ver es la recíproca. Tomemos $h \in H, g \in G$ y escribamos $g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$. En estos términos, debe ser $g^{-1} = s_n^{-\varepsilon_n} \cdots s_1^{-\varepsilon_1}$. Ahora, por hipótesis $h_1 = s_n^{\varepsilon_n} h s_n^{-\varepsilon_n}$ es un elemento de H. Del mismo modo $h_2 = s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} h_1 s_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}}$ también está en H.

Sistemas de Generadores - Grupos Normales

Trabajar con generadores nos permite dar información sobre todo el grupo G analizando sólo lo que sucede para algunos elementos. Por ejemplo,

Proposición

Sea G un grupo y S un conjunto de generadores. Un subgrupo H de G es normal si y solo si $sHs^{-1} \subset H$ y $s^{-1}Hs \subset H$ para todo $s \in S$.

Demostración.

Si H es normal, ya sabemos que $gHg^{-1} \subset H$ para todo $g \in G$, lo que debemos ver es la recíproca. Tomemos $h \in H, g \in G$ y escribamos $g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$. En estos términos, debe ser $g^{-1} = s_n^{-\varepsilon_n} \cdots s_1^{-\varepsilon_1}$. Ahora, por hipótesis $h_1 = s_n^{\varepsilon_n} h s_n^{-\varepsilon_n}$ es un elemento de H. Del mismo modo $h_2 = s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} h_1 s_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}}$ también está en H.Repetimos el proceso hasta llegar a que

$$ghg^{-1} = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} h s_n^{-\varepsilon_n} \cdots s_1^{-\varepsilon_1}$$

pertenece a H, como queríamos ver. □

Sistemas de Generadores - Grupos Normales (cont.)

Ejercicio

El resultado anterior es falso si pedimos solamente que $sHs^{-1} \subset H$ *para todo* $s \in S$. *Justificar por qué la demostración anterior no es correcta si sólo tenemos esta hipótesis.*

Sistemas de Generadores - Grupos Normales (cont.)

Ejercicio

El resultado anterior es falso si pedimos solamente que $sHs^{-1} \subset H$ para todo $s \in S$. Justificar por qué la demostración anterior no es correcta si sólo tenemos esta hipótesis.

Algunas consecuencias inmediatas:

Sistemas de Generadores - Grupos Normales (cont.)

Ejercicio

El resultado anterior es falso si pedimos solamente que $sHs^{-1} \subset H$ para todo $s \in S$. Justificar por qué la demostración anterior no es correcta si sólo tenemos esta hipótesis.

Algunas consecuencias inmediatas:

- Un subgrupo H es normal en S_n si y sólo si $\tau H \tau^{-1} \subset H$ para toda transposición $\tau \in S_n$.

Sistemas de Generadores - Grupos Normales (cont.)

Ejercicio

El resultado anterior es falso si pedimos solamente que $sHs^{-1} \subset H$ para todo $s \in S$. Justificar por qué la demostración anterior no es correcta si sólo tenemos esta hipótesis.

Algunas consecuencias inmediatas:

- Un subgrupo H es normal en S_n si y sólo si $\tau H \tau^{-1} \subset H$ para toda transposición $\tau \in S_n$.
- Para decidir si un subgrupo H de D_n es normal, alcanza ver que $sHs \subset H$ y $rHr^{-1}, r^{-1}Hr \subset H$.

Sistemas de Generadores - Cocientes

Si H es un subgrupo normal de un grupo G, sabemos que G/H es un grupo, y por lo tanto tiene sentido hablar de un sistema de generadores para G/H.

Sistemas de Generadores - Cocientes

Si H es un subgrupo normal de un grupo G, sabemos que G/H es un grupo, y por lo tanto tiene sentido hablar de un sistema de generadores para G/H. A partir de generadores de G podemos conseguir generadores de G/H,

Sistemas de Generadores - Cocientes

Si H es un subgrupo normal de un grupo G, sabemos que G/H es un grupo, y por lo tanto tiene sentido hablar de un sistema de generadores para G/H. A partir de generadores de G podemos conseguir generadores de G/H,

Proposición

Sea G un grupo y $H \triangleleft G$. Notamos $\pi : g \mapsto [g] = gH \in G/H$ a la proyección canónica. Si S es un conjunto de generadores de G, entonces $T := \pi(S) = \{[s] : s \in S\}$ es un conjunto de generadores de G/H.

Sistemas de Generadores - Cocientes

Si H es un subgrupo normal de un grupo G, sabemos que G/H es un grupo, y por lo tanto tiene sentido hablar de un sistema de generadores para G/H. A partir de generadores de G podemos conseguir generadores de G/H,

Proposición

Sea G un grupo y $H \triangleleft G$. Notamos $\pi : g \mapsto [g] = gH \in G/H$ a la proyección canónica. Si S es un conjunto de generadores de G, entonces $T := \pi(S) = \{[s] : s \in S\}$ es un conjunto de generadores de G/H.

Demostración.

Tomemos $x \in G/H$. Sabemos que es de la forma $x = [g] = gH$ para algún $g \in G$.

Sistemas de Generadores - Cocientes

Si H es un subgrupo normal de un grupo G, sabemos que G/H es un grupo, y por lo tanto tiene sentido hablar de un sistema de generadores para G/H. A partir de generadores de G podemos conseguir generadores de G/H,

Proposición

Sea G un grupo y $H \triangleleft G$. Notamos $\pi : g \mapsto [g] = gH \in G/H$ a la proyección canónica. Si S es un conjunto de generadores de G, entonces $T := \pi(S) = \{[s] : s \in S\}$ es un conjunto de generadores de G/H.

Demostración.

Tomemos $x \in G/H$. Sabemos que es de la forma $x = [g] = gH$ para algún $g \in G$. Como S genera a G, es $g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$ para ciertos $\{s_i\}_{i=1}^n \subset S, \{\varepsilon_i\}_{i=1}^n \subset \{-1, 1\}$.

Sistemas de Generadores - Cocientes

Si H es un subgrupo normal de un grupo G, sabemos que G/H es un grupo, y por lo tanto tiene sentido hablar de un sistema de generadores para G/H. A partir de generadores de G podemos conseguir generadores de G/H,

Proposición

Sea G un grupo y $H \triangleleft G$. Notamos $\pi : g \mapsto [g] = gH \in G/H$ a la proyección canónica. Si S es un conjunto de generadores de G, entonces $T := \pi(S) = \{[s] : s \in S\}$ es un conjunto de generadores de G/H.

Demostración.

Tomemos $x \in G/H$. Sabemos que es de la forma $x = [g] = gH$ para algún $g \in G$. Como S genera a G, es $g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$ para ciertos $\{s_i\}_{i=1}^n \subset S, \{\varepsilon_i\}_{i=1}^n \subset \{-1, 1\}$. Aplicando π a ambos lados de la igualdad, resulta $[g] = [s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}] = [s_1]^{\varepsilon_1} \cdots [s_n]^{\varepsilon_n}$. □

Sistemas de Generadores - Cocientes (cont.)

También podemos conseguir generadores de G a partir de generadores de H y G/H. Concretamente,

Sistemas de Generadores - Cocientes (cont.)

También podemos conseguir generadores de G a partir de generadores de H y G/H. Concretamente,

Proposición

Sea G un grupo y H un subgrupo normal. Si tenemos $S, T \subset G$ tales que S genera a H y $\pi(T)$ genera a G/H, entonces $S \cup T$ genera a G.

Sistemas de Generadores - Cocientes (cont.)

También podemos conseguir generadores de G a partir de generadores de H y G/H. Concretamente,

Proposición

Sea G un grupo y H un subgrupo normal. Si tenemos $S, T \subset G$ tales que S genera a H y $\pi(T)$ genera a G/H, entonces $S \cup T$ genera a G.

Idea de la demostración.

Sistemas de Generadores - Cocientes (cont.)

También podemos conseguir generadores de G a partir de generadores de H y G/H. Concretamente,

Proposición

Sea G un grupo y H un subgrupo normal. Si tenemos $S, T \subset G$ tales que S genera a H y $\pi(T)$ genera a G/H, entonces $S \cup T$ genera a G.

Idea de la demostración.

- Tomemos $g \in G$. Por hipótesis $[g]$ se escribe como $[g] = [t_1]^{\varepsilon_1} \cdots [t_n]^{\varepsilon_n} = [t_1^{\varepsilon_1} \cdots t_n^{\varepsilon_n}]$ para ciertos $t_i \in T$.

Sistemas de Generadores - Cocientes (cont.)

También podemos conseguir generadores de G a partir de generadores de H y G/H. Concretamente,

Proposición

Sea G un grupo y H un subgrupo normal. Si tenemos $S, T \subset G$ tales que S genera a H y $\pi(T)$ genera a G/H, entonces $S \cup T$ genera a G.

Idea de la demostración.

- Tomemos $g \in G$. Por hipótesis $[g]$ se escribe como $[g] = [t_1]^{\varepsilon_1} \cdots [t_n]^{\varepsilon_n} = [t_1^{\varepsilon_1} \cdots t_n^{\varepsilon_n}]$ para ciertos $t_i \in T$.
- Esta igualdad nos dice que existe $h \in H$ tal que $g = t_1^{\varepsilon_1} \cdots t_n^{\varepsilon_n} h$.

Sistemas de Generadores - Cocientes (cont.)

También podemos conseguir generadores de G a partir de generadores de H y G/H. Concretamente,

Proposición

Sea G un grupo y H un subgrupo normal. Si tenemos $S, T \subset G$ tales que S genera a H y $\pi(T)$ genera a G/H, entonces $S \cup T$ genera a G.

Idea de la demostración.

- Tomemos $g \in G$. Por hipótesis $[g]$ se escribe como $[g] = [t_1]^{\varepsilon_1} \cdots [t_n]^{\varepsilon_n} = [t_1^{\varepsilon_1} \cdots t_n^{\varepsilon_n}]$ para ciertos $t_i \in T$.
- Esta igualdad nos dice que existe $h \in H$ tal que $g = t_1^{\varepsilon_1} \cdots t_n^{\varepsilon_n} h$.
- Por otro lado debe ser $h = s_1^{\delta_1} \cdots s_n^{\delta_m}$ con $s_j \in S$ así que, en definitiva, es $g = t_1^{\varepsilon_1} \cdots t_n^{\varepsilon_n} s_1^{\delta_1} \cdots s_n^{\delta_m}$.

$\square$

Antes de seguir, veamos una aplicación:

Sistemas de Generadores - Una Aplicación

Antes de seguir, veamos una aplicación:

Dijimos anteriormente que si $n \geq 3$, entonces $S_n/A_n = \{[1], [\tau]\}$ con τ cualquier transposición. Este cociente es un grupo cíclico generado por $[\tau]$.

Sistemas de Generadores - Una Aplicación

Antes de seguir, veamos una aplicación:

Dijimos anteriormente que si $n \geq 3$, entonces $S_n/A_n = \{[1], [\tau]\}$ con τ cualquier transposición. Este cociente es un grupo cíclico generado por $[\tau]$.

Por otro lado, el grupo alternante está generado por los 3-ciclos (esta respuesta en Zulip incluye una demostración).

Sistemas de Generadores - Una Aplicación

Antes de seguir, veamos una aplicación:

Dijimos anteriormente que si $n \geq 3$, entonces $S_n/A_n = \{[1], [\tau]\}$ con τ cualquier transposición. Este cociente es un grupo cíclico generado por $[\tau]$.

Por otro lado, el grupo alternante está generado por los 3-ciclos (esta respuesta en Zulip incluye una demostración). El resultado que probamos nos dice que S_n está generado por los 3-ciclos y una única transposición (y no importa cuál elijamos!).

El primer teorema de isomorfismo

Recordar: si $f : G \to G'$ es un morfismo de grupos y $K \triangleleft G$ un subgrupo normal de G contenido en $\ker f$, existe un único morfismo de grupos

$$\overline{f} : [g] \in G/K \mapsto f(g) \in G'$$

tal que $\overline{f}\pi = f$, donde $\pi : G \to G/K$ es la proyección canónica. Además, se tiene $\mathrm{im} f = \mathrm{im} \overline{f}$.

El primer teorema de isomorfismo

Recordar: si $f : G \to G'$ es un morfismo de grupos y $K \lhd G$ un subgrupo normal de G contenido en $\ker f$, existe un único morfismo de grupos

$$\overline{f} : [g] \in G/K \mapsto f(g) \in G'$$

tal que $\overline{f}\pi = f$, donde $\pi : G \to G/K$ es la proyección canónica. Además, se tiene $\mathrm{im} f = \mathrm{im} \overline{f}$.

Cuando $K = \ker f$, el morfismo $\overline{f}$ es inyectivo y entonces es un isomorfismo con su imagen, por lo que

$$G/\ker f \simeq \mathrm{im} f.$$

El primer teorema de isomorfismo

En estos términos, los cocientes que vimos hace unas clases se pueden caracterizar como grupos:

El primer teorema de isomorfismo

En estos términos, los cocientes que vimos hace unas clases se pueden caracterizar como grupos:

- $\mathrm{sg}: S_n \to G_2 \rightsquigarrow S_n/A_n \simeq G_2$

El primer teorema de isomorfismo

En estos términos, los cocientes que vimos hace unas clases se pueden caracterizar como grupos:

- $\mathrm{sg} : S_n \to G_2 \rightsquigarrow S_n/A_n \simeq G_2$
- $r_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \rightsquigarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$, con r_n la función que devuelve el resto en la división por $n \in \mathbb{N}$.

El primer teorema de isomorfismo

En estos términos, los cocientes que vimos hace unas clases se pueden caracterizar como grupos:

- $\mathrm{sg} : S_n \to G_2 \rightsquigarrow S_n/A_n \simeq G_2$
- $r_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \rightsquigarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$, con r_n la función que devuelve el resto en la división por $n \in \mathbb{N}$.
- $p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (0, y) \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{R} \oplus 0 \simeq \mathbb{R}$.

El primer teorema de isomorfismo

En estos términos, los cocientes que vimos hace unas clases se pueden caracterizar como grupos:

- $\mathrm{sg} : S_n \to G_2 \rightsquigarrow S_n/A_n \simeq G_2$
- $r_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \rightsquigarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$, con r_n la función que devuelve el resto en la división por $n \in \mathbb{N}$.
- $p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (0, y) \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{R} \oplus 0 \simeq \mathbb{R}$.

Veamos otro ejemplo, para el cual necesitaremos primero algunas definiciones.

El grupo afín

Una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice afín si es de la forma $T(x) = Ax + b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$. Notaremos $T = A + b$.

El grupo afín

Una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice afín si es de la forma $T(x) = Ax + b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$. Notaremos $T = A + b$. Intuitivamente, estamos considerando funciones lineales que "olvidan el origen", ya que permitimos trasladar.

El grupo afín

Una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice afín si es de la forma $T(x) = Ax + b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$. Notaremos $T = A + b$. Intuitivamente, estamos considerando funciones lineales que "olvidan el origen", ya que permitimos trasladar.

Ejercicio

Probar que:

El grupo afín

Una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice afín si es de la forma $T(x) = Ax + b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$. Notaremos $T = A + b$. Intuitivamente, estamos considerando funciones lineales que "olvidan el origen", ya que permitimos trasladar.

Ejercicio

Probar que:

- *Una transformación afín $T = A + b$ es inversible si y sólo si A lo es. En tal caso, su inversa es también una transformación afín.*

El grupo afín

Una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice afín si es de la forma $T(x) = Ax + b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$. Notaremos $T = A + b$. Intuitivamente, estamos considerando funciones lineales que "olvidan el origen", ya que permitimos trasladar.

Ejercicio

Probar que:

- *Una transformación afín $T = A + b$ es inversible si y sólo si A lo es. En tal caso, su inversa es también una transformación afín.*
- *La composición de transformaciones afines resulta una transformación afín.*

El grupo afín

Una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice afín si es de la forma $T(x) = Ax + b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$. Notaremos $T = A + b$. Intuitivamente, estamos considerando funciones lineales que "olvidan el origen", ya que permitimos trasladar.

Ejercicio

Probar que:

- *Una transformación afín $T = A + b$ es inversible si y sólo si A lo es. En tal caso, su inversa es también una transformación afín.*
- *La composición de transformaciones afines resulta una transformación afín.*

El ejercicio anterior justifica que

$$\begin{aligned} Aff_n(\mathbb{R}) :&= \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : T \text{ es afín e inversible}\} \\ &= \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid T(x) = Ax + b, b \in \mathbb{R}^n, A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\} \end{aligned}$$

es un grupo con la composición. Lo llamamos el grupo afín de $\mathbb{R}^n$.

El grupo afín (cont.)

En $Aff_n(\mathbb{R})$ hay dos subgrupos distinguidos:

El grupo afín (cont.)

En $Aff_n(\mathbb{R})$ hay dos subgrupos distinguidos:

- Las funciones lineales inversibles $H := \{T \in Aff_n(\mathbb{R}) : T \text{ es lineal}\}$.

El grupo afín (cont.)

En $Aff_n(\mathbb{R})$ hay dos subgrupos distinguidos:

- Las funciones lineales inversibles $H := \{T \in Aff_n(\mathbb{R}) : T \text{ es lineal}\}$.
- Las traslaciones,

$$K := \{T \in Aff_n(\mathbb{R}) \mid T(x) = x + b, b \in \mathbb{R}^n\} = \{I + b : b \in \mathbb{R}^n\}.$$

El grupo afín (cont.)

En $Aff_n(\mathbb{R})$ hay dos subgrupos distinguidos:

- Las funciones lineales inversibles $H := \{T \in Aff_n(\mathbb{R}) : T \text{ es lineal}\}$.
- Las traslaciones,

$$K := \{T \in Aff_n(\mathbb{R}) \mid T(x) = x + b, b \in \mathbb{R}^n\} = \{I + b : b \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ejercicio

Probar que:

El grupo afín (cont.)

En $Aff_n(\mathbb{R})$ hay dos subgrupos distinguidos:

- Las funciones lineales inversibles $H := \{T \in Aff_n(\mathbb{R}) : T \text{ es lineal}\}$.
- Las traslaciones,

$$K := \{T \in Aff_n(\mathbb{R}) \mid T(x) = x + b, b \in \mathbb{R}^n\} = \{I + b : b \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ejercicio

Probar que:

- *Existen isomorfismos $H \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y $K \simeq \mathbb{R}^n$.*

El grupo afín (cont.)

En $Aff_n(\mathbb{R})$ hay dos subgrupos distinguidos:

- Las funciones lineales inversibles $H := \{T \in Aff_n(\mathbb{R}) : T \text{ es lineal}\}$.
- Las traslaciones,

$$K := \{T \in Aff_n(\mathbb{R}) \mid T(x) = x + b, b \in \mathbb{R}^n\} = \{I + b : b \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ejercicio

Probar que:

- *Existen isomorfismos* $H \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *y* $K \simeq \mathbb{R}^n$.
- *El subgrupo* K *es normal en* $Aff_n(\mathbb{R})$*, pero* H *no.*

El grupo afín (cont.)

Observemos también que todo elemento $S(x) = Ax + b$ del grupo afín se escribe como $S = TL$ con $T(x) = x + b$ una traslación y $L(x) = Ax$ una función lineal inversible. De hecho,

El grupo afín (cont.)

Observemos también que todo elemento $S(x) = Ax + b$ del grupo afín se escribe como $S = TL$ con $T(x) = x + b$ una traslación y $L(x) = Ax$ una función lineal inversible. De hecho,

Ejercicio (para más adelante!)

Probar que $Aff_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

El grupo afín (cont.)

Observemos también que todo elemento $S(x) = Ax + b$ del grupo afín se escribe como $S = TL$ con $T(x) = x + b$ una traslación y $L(x) = Ax$ una función lineal inversible. De hecho,

Ejercicio (para más adelante!)

Probar que $\mathit{Aff}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Volvamos al primer teorema de isomorfismo: sabemos que las traslaciones son un grupo normal.

El grupo afín (cont.)

Observemos también que todo elemento $S(x) = Ax + b$ del grupo afín se escribe como $S = TL$ con $T(x) = x + b$ una traslación y $L(x) = Ax$ una función lineal inversible. De hecho,

Ejercicio (para más adelante!)

Probar que $Aff_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Volvamos al primer teorema de isomorfismo: sabemos que las traslaciones son un grupo normal. Intuitivamente, identificando transformaciones afines si difieren en una traslación deberíamos recuperar "su parte lineal".

El grupo afín (cont.)

Observemos también que todo elemento $S(x) = Ax + b$ del grupo afín se escribe como $S = TL$ con $T(x) = x + b$ una traslación y $L(x) = Ax$ una función lineal inversible. De hecho,

Ejercicio (para más adelante!)

Probar que $Aff_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Volvamos al primer teorema de isomorfismo: sabemos que las traslaciones son un grupo normal. Intuitivamente, identificando transformaciones afines si difieren en una traslación deberíamos recuperar "su parte lineal". Es decir, deberíamos tener que $Aff_n(\mathbb{R})/K \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Veámoslo.

El grupo afín (cont.)

En base a lo anterior, consideramos la función

$$\begin{aligned} \Lambda\colon \mathit{Aff}_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A + b &\longmapsto A \end{aligned}$$

El grupo afín (cont.)

En base a lo anterior, consideramos la función

$$\begin{aligned} \Lambda\colon \mathit{Aff}_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A + b &\longmapsto A \end{aligned}$$

Si $T = A + b$ y $S = C + d$, entonces

$$T \circ S(x) = T(Cx + d) = ACx + Ad + b$$

y $\Lambda(TS) = AC = \Lambda(T)\Lambda(S)$.

El grupo afín (cont.)

En base a lo anterior, consideramos la función

$$\begin{aligned} \Lambda\colon \mathit{Aff}_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ A + b &\longmapsto A \end{aligned}$$

Si $T = A + b$ y $S = C + d$, entonces

$$T \circ S(x) = T(Cx + d) = ACx + Ad + b$$

y $\Lambda(TS) = AC = \Lambda(T)\Lambda(S)$. Por lo tanto Λ es un morfismo de grupos. Además Λ es sobreyectivo, ya que $\Lambda(A) = A$ para toda A inversible, y

$$\ker \Lambda = \{I + b : b \in \mathbb{R}^n\} = K.$$

El grupo afín (cont.)

En base a lo anterior, consideramos la función

$$\begin{aligned}\Lambda\colon \mathit{Aff}_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\\ A+b &\longmapsto A\end{aligned}$$

Si $T = A + b$ y $S = C + d$, entonces

$$T \circ S(x) = T(Cx + d) = ACx + Ad + b$$

y $\Lambda(TS) = AC = \Lambda(T)\Lambda(S)$. Por lo tanto Λ es un morfismo de grupos. Además Λ es sobreyectivo, ya que $\Lambda(A) = A$ para toda A inversible, y

$$\ker \Lambda = \{I + b : b \in \mathbb{R}^n\} = K.$$

Por el primer teorema de isomorfismo, obtenemos efectivamente que

$$\mathit{Aff}_n(\mathbb{R})/K \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Subgrupos de un Cociente

Para terminar, caractericemos a los subgrupos de un cociente. Sea G un grupo y H un subgrupo normal en G.

Subgrupos de un Cociente

Para terminar, caractericemos a los subgrupos de un cociente. Sea G un grupo y H un subgrupo normal en G. Si aplicamos la Proposición 1.4.24 del apunte teórico a la proyección $\pi : G \to G/H$, obtenemos una correspondencia biyectiva

$$\{H \subset K : \ K \text{ subgrupo de } G\} \leftrightarrow \{L \subset G/H : L \text{ subgrupo de } G/H\}$$

que envía K a $\pi(K)$ y L a $\pi^{-1}(L)$. Además, la correspondencia envía subgrupos grupos normales a subgrupos normales.

Subgrupos de un Cociente

Para terminar, caractericemos a los subgrupos de un cociente. Sea G un grupo y H un subgrupo normal en G. Si aplicamos la Proposición 1.4.24 del apunte teórico a la proyección $\pi : G \to G/H$, obtenemos una correspondencia biyectiva

$$\{H \subset K : \ K \text{ subgrupo de } G\} \leftrightarrow \{L \subset G/H : L \text{ subgrupo de } G/H\}$$

que envía K a $\pi(K)$ y L a $\pi^{-1}(L)$. Además, la correspondencia envía subgrupos grupos normales a subgrupos normales.

Relacionando esto con el ejemplo anterior, los subgrupos de $Aff_n(\mathbb{R})$ que contienen a las traslaciones se identifican con los subgrupos de $Aff_n(\mathbb{R})/K$.

Subgrupos de un Cociente (cont.)

Por otro lado, pudimos caracterizar el cociente como un grupo conocido, y bajo el isomorfismo $\overline{\Lambda}: Aff_n(\mathbb{R})/K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ los subgrupos de $Aff_n(\mathbb{R})/K$ son de la forma $\overline{\Lambda}^{-1}(L)$ con L un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Subgrupos de un Cociente (cont.)

Por otro lado, pudimos caracterizar el cociente como un grupo conocido, y bajo el isomorfismo $\overline{\Lambda} : Aff_n(\mathbb{R})/K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ los subgrupos de $Aff_n(\mathbb{R})/K$ son de la forma $\overline{\Lambda}^{-1}(L)$ con L un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Juntando ambas correspondencias, vemos que todo subgrupo de $Aff_n(\mathbb{R})$ que contiene a las traslaciones es de la forma

$$H_L := \{Ax + b : b \in \mathbb{R}^n, A \in L\}$$

con $L \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ejercicios

Pueden relacionar todos los conceptos que vimos con los siguientes ejercicios,

Ejercicios

Pueden relacionar todos los conceptos que vimos con los siguientes ejercicios,

Ejercicio

¿Cuántos subgrupos de $D_{7981326}$ *que contienen a* $H := \langle r^2 \rangle$ *hay?*

Ejercicios

Pueden relacionar todos los conceptos que vimos con los siguientes ejercicios,

Ejercicio

¿Cuántos subgrupos de $D_{7981326}$ que contienen a $H := \langle r^2 \rangle$ hay?

Ejercicio

Un grupo G se dice simple *si $G \neq \{1\}$ y sus únicos subgrupos normales son $\{1\}$ y G.*

(i) *Sea H un subgrupo normal en un grupo G. Probar que G/H es simple si y sólo si el único subgrupo normal que contiene propiamente a H es G.*

(ii) *Probar que un grupo abeliano finito G es simple si y sólo si $G \simeq \mathbb{Z}_p$ con p primo. Concluir que en todo grupo abeliano finito $G \neq \{1\}$ existe un subgrupo H tal que $G/H \simeq \mathbb{Z}_p$, para algún p primo.*