Teoría Geométrica de la Medida

Primer cuatrimestre de 2019

Ejercicios para entregar - Prácticas 1 y 2

1. Sea μ una medida Borel regular en X. Probar que si $A \subset X$ es medible y $\mu(A) < \infty$ entonces μ_A también es Borel regular.

2. Sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de medidas definida como
$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{k}{n}}$$
Probar que el límite débil de μ_n es la medida de Lebesgue restringida al intervalo $[0,1]$.

3. Sean μ y $\{\mu_n\}_n$ medidas de Radón. Probar que si para cada conjunto boreliano acotado B tal que $\mu(\partial B) = 0$ vale que
$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B),$$
entonces $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Concluir que esta condición caracteriza la convergencia débil.

   Hint: Dada una $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$ y un $\varepsilon > 0$, elegir puntos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ para algún N tales que
$$0 < t_i - t_{i-1} < \varepsilon, \qquad \mu(f^{-1}\{t_i\}) = 0, \qquad t_N > \|f\|_{L^\infty}.$$
   Definir $B_i = \{x \in \mathbb{R}^N : t_i < f(x) \leq t_{i+1}\}$ y considerar la función
$$f_\varepsilon := \sum_{i=1}^{N} t_i \chi_{B_i}$$

4. Construir un conjunto $E \subset [0,1]$ tal que $\dim E = 1$ y $\mathcal{H}^1(E) = 0$.

5. Considerar una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ decreciente de términos no negativos. Construir un conjunto de Cantor C definido a partir del intervalo $[0,1]$ removiendo en cada paso k un intervalo central de proporción ε_k de cada uno de los intervalos del nivel $k-1$.

   a) Probar que si $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = \varepsilon$ entonces $\dim C = \frac{\log 2}{\log(\frac{2}{1-\varepsilon})}$.

   b) Construir un conjunto de Cantor C siguiendo este esquema de modo que $\dim C = 1$ y $\mathcal{H}^1(E) = 0$.

6. Mostrar que existen dos conjuntos $E, F \subset \mathbb{R}$ tales que $\dim_H(E) = \dim_H(F) = 0$ y $\dim_H(E \times F) = 1$. Sugerencia: considerar conjuntos en E, F en $[0,1]$ tales que $\dim_B(E) = \underline{\dim}_B(F) = 0$ y que $[0,1] \subset E + F$.

7. Para $\alpha > 0$, considerar $A_\alpha = \{0\} \cup \{\frac{1}{n^\alpha} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. Calcular $\overline{\dim}_B(A)$.