Teoría Geométrica de la Medida

Primer cuatrimestre de 2019

Práctica 4

1. a) Probar que un 1-set irregular es totalmente disconexo. Sugerencia: probar primero que si E es compacto y conexo entonces $\mathcal{H}^1(E) \geq \operatorname{diam}(E)$.

   b) Dar un ejemplo de un 1-set regular totalmente disconexo.

2. Probar que un 1-set $E \subset \mathbb{R}^2$ es irregular si y sólo si $\mathcal{L}^1(P_\theta(E)) = 0$ para dos direcciones θ_1, θ_2 distintas.

3. Probar que el conjunto $E = C_{1/4} \times C_{1/4}$ es un 1-set irregular. No hace falta calcular densidades.

4. Sean $E, F \subset \mathbb{R}$ tales que $\mathcal{H}^1(E) = \mathcal{H}^1(F) = 0$. Probar que para cualquier curva rectificable $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ vale que $\mathcal{H}^1(E \times F \cap \Gamma) = 0$.

5. Sean E y F dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, considerar el conjunto de combinaciones $C_\lambda = \{a + \lambda b : a \in E, b \in F\}$. Probar que para casi todo $\lambda \in \mathbb{R}$ vale que

$$\dim(C_\lambda) = \text{mín}\{1, \dim(E \times F\}$$

6. Dado un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, notamos con $L(a, b)$ a la recta de ecuación $y = a + bx$. Si $E \subset \mathbb{R}^2$, notamos con $L(E)$ al conjunto de todas las rectas definidas por los elementos de E:

$$L(E) = \bigcup_{(a,b)\in E} L(a, b)$$

   Dado $c \in \mathbb{R}$ definimos $L_c\colon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = c\}$. Probar que si $c = \tan\theta$ entonces $L(E) \cap L_c$ es semejante a $\operatorname{proy}_\theta(E)$. Encontrar la trasnformación de similaridad entre ambos conjuntos y concluir que

$$\dim(L(E) \cap L_c) = \dim(\operatorname{proy}_\theta(E)).$$