Teoría Geométrica de la Medida

Primer cuatrimestre de 2019

Práctica 3

Fórmulas de Área y Coárea

1. Teoremas de Cambio de Variables basados en las fórmulas de Área y Coárea:

   Cambio de variables 1: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz, con $n \leq m$. Entonces para toda función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-sumable vale

   $$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)Jf(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) d\mathcal{H}^n(y).$$

   Cambio de variables 2: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función Lipschitz, con $n \geq m$. Entonces para toda función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-sumable vale que

   $$g|_{f^{-1}(y)} \ \text{ es } \ \mathcal{H}^{n-m} - \text{sumable para } \ \mathcal{L}^m - \text{casi todo } y$$

   y

   $$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)Jf(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{f^{-1}(y)} g(x) d\mathcal{H}^{n-m}(x) \right] dy.$$

   Estos teoremas valen si la integral del lado izquierdo es finita, pero no es suficiente asumir en su lugar que la integral del lado derecho es finita. Hallar un contraejemplo. (Sugerencia: tomar $n = m = 1$).

2. Sea $n \leq m$ y considerar $G \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $f : G \to \mathbb{R}^m$ es una función Lipschitz e inyetiva entonces vale que

   $$\mathcal{H}^n(f(G)) = \int_G |J_f(x)| dx.$$

3. Sea $\sigma : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz e inyetiva. Entonces vale que la longitud de la curva imagen $\mathcal{C} = \sigma((a, b))$ se calcula como

   $$\mathcal{H}^1(\mathcal{C}) = \int_G |\sigma'(t)| dt.$$

4. Sea $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz positiva. Considerar las superficies de revolución:

$$S_y = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a < y < b, \sqrt{x^2+z^2} = g(y) \right\}$$

$$S_z = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a < \sqrt{x^2+y^2} < b, z = g\left(\sqrt{x^2+z^2}\right) \right\}$$

Calcular $\mathcal{H}^2(S_y)$ y $\mathcal{H}^2(S_y)$ en términos de g.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx = \int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} f(x)\ d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right)\ dr.$$

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz. Probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)|\ dx = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\})\ dt.$$

7. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz tal que $\text{essinf}|Df| > 0$. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-sumable. Probar que

$$\int_{\{f>t\}} g(x)\ dx = \int_t^\infty \left(\int_{f=s} \frac{g}{|Df|}\ d\mathcal{H}^{n-1} \right)\ ds.$$

8. Probar que $\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x,r)) = n\alpha_n r^{n-1}$ donde $\alpha_n = \mathcal{L}^n(B(0,1))$.

9. Sea $v : [0,\infty] \to \mathbb{R}$. Probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(|x|)dx = n\alpha_n \int_0^\infty r^{n-1} v(r)dr$$

si cualquiera de las integrales tiene sentido.

10. Probar que

$$\alpha_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Sugerencia: Integrar la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-|x|^2}$ y usar alguna expresión adecuada para la función Gamma.