Teoría Geométrica de la Medida

Primer cuatrimestre de 2019

Práctica 2

Dimensión

1. Para $A \subseteq \mathbb{R}^n$, probar que
$$\dim_H(A) = \sup\{s \in [0, +\infty) : \mathcal{H}^s(A) = +\infty\}.$$

2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\psi : A \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz, es decir, existe $C > 0$ tal que $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq C\|x - y\|$ $\forall\ x, y \in A$.

   Probar que para cada $s > 0$ se tiene que
$$\mathcal{H}^s(\psi(A)) \leq C^s \mathcal{H}^s(A),$$
   y en particular
$$\dim_H(\psi(A)) \leq \dim_H(A).$$

3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\psi : A \to \mathbb{R}^n$ una función que satisface lo siguiente: existe $\alpha \in (0, 1]$ tal que $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha$ $\forall\ x, y \in A$.

   Probar que bajo estas condiciones,
$$\dim_H(\psi(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(A).$$

4. Demostrar que:
$$\begin{aligned}\overline{\dim}_M(A) &= \inf\left\{0 < s \,/\, \limsup_{\varepsilon \to 0^+} N(A, \varepsilon)\, \varepsilon^s < +\infty\right\}\\ &= \sup\left\{0 < s \,/\, \limsup_{\varepsilon \to 0^+} N(A, \varepsilon)\, \varepsilon^s = +\infty\right\}\\ &= \sup\left\{0 < s \,/\, \limsup_{\varepsilon \to 0^+} N(A, \varepsilon)\, \varepsilon^s > 0\right\}.\end{aligned}$$
   Y que para $\underline{\dim}_M(A)$ vale lo mismo usando $\liminf$ en lugar de $\limsup$.

5. Probar que:
$$\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_M(A) \leq \overline{\dim}_M(A) \leq n.$$

6. Probar que:

$$\overline{\dim}_M(A) = \operatorname*{lím\,sup}_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log(N(A,\varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$\underline{\dim}_M(A) = \operatorname*{lím\,inf}_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\log(N(A,\varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

7. Sea $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, probar que

$$\overline{\dim}_M(A) = \frac{1}{2}.$$

Demostrar además que

$$\overline{\dim}_M(\{x\}) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Observar que de esta forma se probaría que $\overline{\dim}_M$ no cumple que para toda sucesión $\{A_n\}_n$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$,

$$\overline{\dim}_M\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sup_n\ \overline{\dim}_M(A_n).$$

8. Dada una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, \frac{1}{2})$, se construye un conjunto estilo Cantor (notado como $C_{\{\lambda_n\}}$) de forma que en el paso n-ésimo se toman 2^n intervalos de longitud $\lambda_1 \dots \lambda_n$. Se tiene entonces que

$$\frac{|I_{i_1\dots i_n}|}{|I_{i_1\dots i_{n+1}}|} = \frac{1}{\lambda_{n+1}},$$

donde $I_{i_1\dots i_n}$ es un intervalo del paso n-ésimo e $I_{i_1\dots i_{n+1}}$ es uno de los dos intervalos del paso $n+1$-ésimo que se obtienen de $I_{i_1\dots i_n}$.
Probar que si $h \in \mathcal{H}$, siendo

$$\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\} :\ \text{continuas a derecha, no decrecientes y } f(t) > 0 \text{ si } t > 0\}$$

y $h(s_k) = \frac{1}{2^k}$, donde $s_k = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_k$, entonces $\mathcal{H}^h(C_{\{\lambda_n\}}) \in [\frac{1}{4}, 1]$.