

# Teoría Geométrica de la Medida

Primer cuatrimestre de 2019

## Práctica 1

### Medida abstracta

1. Sea  $\mu$  una medida definida sobre  $\Omega$  y  $\{E_k\}_k$  una sucesión de conjuntos medibles disjuntos. Entonces, para todo conjunto arbitrario  $A \subseteq \Omega$ , se tiene:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap E_k) + \mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

2. Sea  $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia de medidas en  $\Omega$ . Para cada  $A \subseteq \Omega$ , definimos  $\nu(A)$  como

$$\nu(A) = \sup_{\alpha \in I} \mu_\alpha(A).$$

Probar que  $\nu$  es una medida definida en  $\Omega$ .

3. Sea  $\mu$  una medida en  $\Omega$  y  $A \subseteq \Omega$  un conjunto arbitrario. Probar:

- (a) Si  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$ , son todos conjuntos medibles, entonces

$$\mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap E_n).$$

- (b) Si  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots$ , son todos conjuntos medibles y además  $\mu(A \cap E_k) < \infty$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\mu\left(A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap E_n).$$

4. Probar que toda función de conjuntos  $\mu$  definida en  $\Omega$  construida usando el Método I es una medida.

5. Sea  $\mu$  una medida regular en  $\Omega$ . Probar:

- (a) Si  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$  son subconjuntos arbitrarios de  $\Omega$ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

- (b) El resultado anterior es falso para intersecciones, aún si se tiene que  $\mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

6. Sea  $\mu$  una medida en  $\Omega$ . Probar que si se construye la medida  $\lambda$  por el método I, a partir de la premedida  $(\Gamma, \mathcal{C})$ , donde  $\Gamma = \mu$  y  $\mathcal{C} = \mathbb{P}(\Omega)$ , entonces  $\lambda = \mu$ .
7. Sea  $\mu$  una medida en  $\Omega$ ,  $B \subseteq \Omega$  un conjunto arbitrario y  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de subconjuntos medibles de  $\Omega$ . Entonces:

- (a)  $\mu(B \cap A_*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(B \cap A_n)$ .  
(b) Si  $\mu(B \cap \bigcup_{k \geq n} A_k) < \infty$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(B \cap A_n) \leq \mu(B \cap A^*).$$

Recordar que

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \text{y} \quad A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

8. Dada una medida  $\mu$  en  $\Omega$  y un conjunto  $A \subseteq \Omega$ , se define  $\mu_A$  como

$$\mu_A(B) = \mu(A \cap B) \quad \forall B \subseteq \Omega.$$

Probar que  $\mu_A$  es una medida en  $\Omega$ .

9. Sean  $\mu$  una medida en  $\Omega$  y  $A \subseteq \Omega$ . Probar que si  $E$  es un subconjunto  $\mu$ -medible de  $\Omega$ , entonces  $E$  es  $\mu_A$ -medible. Es decir,  $M_\mu \subseteq M_{\mu_A}$ .
10. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\mu$  una medida boreliana en  $X$ . Dados  $B \in \beta(X)$  y  $\varepsilon > 0$ , se tiene:
- (a) Si  $\mu(B) < \infty$ , entonces existe un conjunto  $F$  cerrado contenido en  $B$ , tal que  $\mu(B \setminus F) < \varepsilon$ .
- (b) Si  $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ , con  $G_n$  abierto y de medida finita para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces existe  $G$  abierto, tal que  $G \supseteq B$  y  $\mu(G \setminus B) < \varepsilon$ .
- (c) Si  $\mu$  es borel regular, entonces los items (a) y (b) valen para  $B$  conjunto  $\mu$ -medible.
11. Dados  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{R}(a, b)$  denota el rectángulo definido como

$$\mathcal{R}(a, b) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, \text{ para } i = 1 \dots n\}$$

Sea  $\mathfrak{R}$ , la clase de todos los rectángulos definidos anteriormente y  $\Gamma$  la premedida sobre la clase  $\mathfrak{R}$  que verifica  $\Gamma(\mathcal{R}(a, b)) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ .

Probar que si  $\lambda = MI(\Gamma, \mathfrak{R})$  y  $\nu = MII(\Gamma, \mathfrak{R})$ , entonces  $\lambda = \nu$ .

**Sugerencia:** Para probar que  $\lambda \geq \nu$ , suponer primero que  $\lambda(E) < \infty$  y, dado  $\varepsilon > 0$ , tomar un cubrimiento de modo tal que se verifique  $\sum_k \Gamma(\mathcal{R}_k) \leq \lambda(E) + \varepsilon$ . Para armar un  $\delta$ -cubrimiento, partir cada  $\mathcal{R}_k$  en rectángulitos de tamaño adecuado y agrandarlos en  $\eta/2^k$  para que el nuevo cubrimiento contenga el borde.

12. Sea  $\lambda$  una medida en  $\Omega$ . Suponer que  $\lambda$  es regular y  $\lambda(\Omega) < +\infty$ . Probar que  $E \in \mathcal{M}_\lambda$  si y sólo si  $\lambda(\Omega) = \lambda(E) + \lambda(\Omega \setminus E)$ .

13. Sea  $\nu$  una medida  $\sigma$ -aditiva en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ . Decimos que  $\mathcal{A}$  es completa respecto de  $\nu$ , si  $\mathcal{A}$  satisface que: Si  $N \in \mathcal{A}$  y  $\nu(N) = 0$ , entonces  $A \in \mathcal{A}$ , para todo  $A \subset N$ .

Probar que cada medida  $\sigma$ -aditiva en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  puede ser extendida a una medida  $\bar{\nu}$  en una  $\sigma$ -álgebra  $\bar{\mathcal{A}}$  tal que  $\bar{\mathcal{A}}$  es completa con respecto a  $\bar{\nu}$ .

**Hint:** Considerar la clase

$$\bar{\mathcal{A}} = \{E \subset \Omega : \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset E \subset B, \text{ y } \nu(B \setminus A) = 0\}.$$

Probar que  $\bar{\mathcal{A}}$  es una  $\sigma$ -álgebra que contiene  $\mathcal{A}$ , y definir para  $E \in \bar{\mathcal{A}}$ ,  $\bar{\nu}(E) = \nu(B)$ , donde  $A \subset E \subset B$  y  $\nu(B \setminus A) = 0$ ,  $A, B \in \mathcal{A}$ .

Notar que si  $\mu$  es una medida en  $\Omega$ , entonces  $\mathcal{M}_\mu$  es completa respecto a  $\nu$  (la restricción de  $\mu$  a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}_\mu$ ).

14. Usando el Ejercicio 13, mostrar que  $\mathcal{M}_\mu = \bar{\mathcal{M}}_\mu$ .

15. Si  $\mu$  es una medida en  $\Omega$  que no es regular, entonces existe un conjunto  $A \subset \Omega$  tal que

$$\mu(A) < +\infty \quad \text{y} \quad \mu(A) < \inf\{\mu(E) : E \supset A, E \in \mathcal{M}_\mu\}.$$

16. a) Construir un ejemplo de una familia de medidas en un conjunto  $\Omega$  tal que el ínfimo de la familia no sea una medida.

b) Si  $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia de medidas en  $\Omega$ , entonces existe una medida  $\mu$  en  $\Omega$  tal que

$$1) \quad \mu(A) \leq \inf_{\alpha} \mu_\alpha(A) \quad \forall A \subset \Omega.$$

2) If  $\nu$  es una medida en  $\Omega$  tal que

$$\nu(A) \leq \inf_{\alpha} \mu_\alpha(A) \quad \forall A \subset \Omega, \quad \text{entonces} \quad \nu \leq \mu.$$

c) Concluir a partir de lo anterior que el conjunto de medidas en  $\Omega$  es un reticulado completo con el orden parcial dado por  $\mu \preceq \nu$  if  $\mu(A) \leq \nu(A) \quad \forall A \subset \Omega$ .

Recordar que un *reticulado completo* es un conjunto parcialmente ordenado donde cada subconjunto tiene un ínfimo y un supremo.