Teoría Geométrica de la Medida

Primer cuatrimestre de 2019

Temas para exposiciones

Lista preliminar

1. **Conjuntos de Cantor generalizados** (Ezequiel Fattori)

   Estudiar la construcción de conjuntos de Cantor generalizados en alguna de sus versiones siguientes:

   (a) *Conjuntos de Cantor uniformes:* Sea $0 < s \leq 1$. Se define el conjunto $C = \bigcap_k F_k$, con $F_k = \bigcup_{j=1}^{m}$. Cada intervalo I del nivel k se descompone en $J_1, J_2, \ldots, J_m$ intervalos equiespaciados cuyas medidas satisfacen la relación

   $$|J_i|^s = \frac{1}{m}|I|^s.$$

   Probar que $\mathcal{H}^s(C) = 1$.

   Referencia: [Fal86, Teorema 1.15], [Fal03, Ejemplo 4.4].

   (b) *Conjuntos de Cantor no uniformes:* Si en cada paso de la construcción anterior la cantidad de hijos es m_k y están separados por gaps de tamaño ε_k con $0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$, entonces

   $$\dim(C) \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \cdots m_{k-1})}{-\log(m_k\varepsilon_k)}.$$

   Este resultado se puede usar para probar el Teorema de Jarník sobre números bien aproximables. Para $\alpha > 0$, definir el conjunto

   $$E_\alpha = \left\{ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} : \exists p \in \mathbb{Z}, \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\alpha}} \text{ para infinitos } q \in \mathbb{N} \right\}.$$

   Probar que $\dim(E_\alpha) = \frac{2}{2+\alpha}$.

   Referencia: [Fal03, Teorema 10.3].

2. **Funciones de dimensión** (Nahuel Albarracín)

   Estudiar propiedades de las medidas de Hausdorff asociadas a funciones de dimensión $h \in \mathcal{H}$:

   $$\mathbb{H} := \{h : [0,\infty) \to [0:\infty), \text{no decreciente, continua, } h(0) = 0\}.$$

   Algunos resultados que se pueden probar:

   (a) Sean $g, h \in \mathcal{H}$ tales que $g \prec h$. Si un conjunto E en un espacio métrico X tiene medida $\mathcal{H}^g$ σ-finita, entonces $\mathcal{H}^h(E) = 0$.

   (b) Sea E un conjunto en un espacio métrico X tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$ para alguna $h \in \mathcal{H}$. Entonces existe una función $g \in \mathcal{H}$ tal que $g \prec h$ y $\mathcal{H}^g(E) = 0$.

(c) Existe un conjunto no numerable C tal que $\mathcal{H}^h(E) = 0$ **para toda** función de dimensión $h \in \mathcal{H}$.

Referencia: [Rog70, Capítulo 2]

3. **The Souslin operation**

   (a) Desarrollar la idea de la *Souslin operation*. En particular mostrar que si $\mathcal{M}$ es la clase de conjuntos μ-medibles en el espacio de medida (Ω, μ), entonces los conjuntos de Souslin-$\mathcal{M}$ son μ-medibles.
   Referencia: [Rog70, Capítulo 1, Sección 7]

   (b) Probar que en un espacio métrico todo boreliano es un conjunto Souslin-$\mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es la clase de conjuntos cerrados.
   Referencia: [Rog70, Capítulo 2, Teorema 44]

4. **Gráficos de funciones**

   Construir una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico tenga dimensión $s > 1$.

   Referencia: [Fal86, Teorema 8.2], [Fal03, Capítulo 11].

5. **Existencia de conjuntos de medida finita**

   Sea E un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$. Para cada $c > 0$, existe un conjunto $F \subset E$ compacto tal que $\mathcal{H}^s(F) = c$.

   Referencia: [Fal86, Teorema 5.4].

6. **Relación entre medida de Lebesgue y medida de Hausdorff** (Martín Blufstein)

   Probar que
   $$\mathcal{H}^n = \frac{2^n}{\omega_n}\mathcal{L}^n,$$
   donde ω_n denota el volumen de la bola n-dimensional de radio 1.

   Referencia: [EG92, Capítulo 2, Sección 2.2]

7. **Conjuntos autosimilares - Sistemas Iterados de Funciones**

   Considerar un sistema iterado de funciones $\{S_1, \ldots, S_n\}$ que satisfacen la *open set condition*. Si $\{c_1, \ldots, c_n\}$ son las constantes de similaridad asociadas y F es el atractor del sistema, mostrar que $\dim_H(F) = \dim_B(F) = s$, donde s satisface la ecuación
   $$\sum_{i=1}^{n} c_i^s = 1.$$

   Referencia: [Fal03, Teorema 9.3]

8. **Proyecciones de conjuntos irregulares**

   Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto irregular. Entonces $\mathcal{L}^1(P_\theta(E)) = 0$ para casi todo $\theta \in [0, \pi]$.

   Referencia: [Fal86, Teorema 6.13].

9. **Proyecciones** (Violeta Roizman)

   Construir un 1-set $E \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{L}^1(P_\theta(E)) = 0$ *para todo* $\theta \in \mathbb{S}^1$.

   Referencia: [Fal86, Teorema 6.15].

10. **Distance Sets** (Hernán Centeno)

    Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos el "Distance set" de A como $D(A) = \{|x-y| : x, y \in A\}$. Probar que si $\dim(A) > \frac{n+1}{2}$ entonces $\mathcal{L}^1(D(A)) > 0$.

    Referencia [Mat95, Teorema 12.14].

11. **Salem sets** (Agustín Damonte).

    Construir un *Conjunto de Salem* $E \subset \mathbb{R}$. Es decir, un subconjunto de la recta tal que $\dim_F(E) = \dim_H(E)$.

    Referencias:

    [Kah85] [Blu98], [Kau81].

12. **Cantor measures**

    Estudiar las medidas de Cantor definidas sobre C_d para $0 < d < \frac{1}{2}$ construido removiendo en cada paso un segmento central de proporción $1 - 2d$.

    Probar que si $1/d$ es un entero mayor o igual que 3 entonces toda medida $\mu \in \mathcal{M}(C_d)$ cumple que $\limsup_{\xi \to \infty} |\hat{\mu}(\xi)| > 0$.

    Referencias: [Mat15, Teorema 8.1].

13. **Pisot numbers** (Alejandra Aguilera)

    Sea μ_d la medida de Cantor definida sobre C_d para $0 < d < \frac{1}{2}$ (ver punto anterior).

    Probar que $\lim_{\xi \to \infty} |\hat{\mu}(\xi)| > 0$ si y sólo si $1/d$ no es un número de Pisot.

    Referencias: [Mat15, Teorema 8.3].

14. **Fórmula de Co-área** (Ian Fleschler)

    Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz, con $n \geq m$. Para cada conjunto $\mathcal{L}^n$ medible $A \subset \mathbb{R}^n$ vale que

    $$\int_A Jf(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} H^{n-m}(A \cap f^{-1}(y))dy.$$

    Referencias: [EG92, Teorema 1, Sección 3.4].

15. **Teorema de Rademacher y no diferenciabilidad**

    Estudiar alguno de los siguientes resultados.

    (a) (Fowler-Preiss) Sea $E \subset \mathbb{R}$, de tipo $G_{\delta\sigma}$, $|E| = 0$. Entonces existe una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz tal que g es diferenciable en E^c y no es diferenciable en E.

    (b) (Dore-Maleva) Existe un compacto $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tal que toda función Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en algún punto de E.

(c) (Dore-Maleva) Existe un compacto $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tal que $\dim(E) = 1$ y toda función Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en algún punto de E.

16. **Angular densities - Tangency properties**

Estudiar propiedades de existencia de densidades angulares y tangentes a s-sets. En particular, se puede ver que:

(a) Si E es un 1-set regular, entoces tiene tangente en casi todo punto.

(b) Si $\subset \mathbb{R}^2$ es un 1-set irregular, entonces $\mathcal{H}^1$-a.e. no existe tangente.

Referencia: [Fal86, Capítulo 2, Capítulo 3].

References

[Blu98] Christian Bluhm, *On a theorem of Kaufman: Cantor-type construction of linear fractal Salem sets*, Ark. Mat. **36** (1998), no. 2, 307–316.

[EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[Fal86] K. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Fal03] Kenneth Falconer, *Fractal geometry*, second ed., John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, 2003, Mathematical foundations and applications.

[Kah70] Jean-Pierre Kahane, *Sur certains ensembles de Salem*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **21** (1970), 87–89.

[Kah85] ———, *Some random series of functions*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Kau81] R. Kaufman, *On the theorem of Jarník and Besicovitch*, Acta Arith. **39** (1981), no. 3, 265–267.

[Mat95] Pertti Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Fractals and rectifiability.

[Mat15] ———, *Fourier analysis and Hausdorff dimension*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 150, Cambridge University Press, Cambridge, 2015. MR 3617376

[Rog70] C. A. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge University Press, London, 1970.