

Práctica 2

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3} \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. Hallar la suma de las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (\text{sug.: fracciones simples})$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$$

3. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

4. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

5. ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es divergente?

6. i) Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

Sugerencia: Recordar la demostración del criterio de comparación con una integral impropia.

ii) Si $r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, demostrar que r_n converge.

Nota: El límite de r_n se conoce como la *constante de Euler-Mascheroni*. Su valor aproximado es 0.57721...

7. Por comparación con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, establecer el *criterio de Raabe*: la serie de términos positivos $\sum a_n$ converge o diverge según

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

sea mayor que $1 + \varepsilon$ o menor que $1 - \varepsilon$ para todo n suficientemente grande, y para algún $\varepsilon > 0$ independiente de n .

8. Probar el siguiente teorema de Abel: Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos, y si $\sum a_n$ converge, entonces $na_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Sug.: $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y similarmente para na_{2n+1} .

9. Probar el siguiente criterio de convergencia (condensación de Cauchy): Sea b_n una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces la serie $\sum b_n$ converge si y sólo si la serie $\sum 2^n b_{2^n}$ converge.

10. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}.$$

11. (a) Mostrar que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Vale este resultado si $\sum a_n$ converge sólo condicionalmente?

(b) ¿Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq 0$, se puede concluir algo de $\sum \sqrt{a_n}$?

12. Sea $|\alpha| < 1$. Mostrar que

$$\frac{1}{(1 - \alpha)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1}.$$

13. Hallar los valores de x para los cuales convergen las series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} n!(x + 1)^n.$$