

PRÁCTICA 9: TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

**Ejercicio 1.** Sean  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión que satisface  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  y  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias tal que  $a_n(X_n - X) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$  para ciertas variables aleatorias  $X$  y  $Z$ .

- a) Probar que  $X_n \xrightarrow{P} X$ .
- b) Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Mostrar que

$$n^\alpha(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

donde  $n^\alpha(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \infty$  significa que para todo  $M > 0$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|n^\alpha(\bar{X}_n - \mu)| \leq M) = 0.$$

¿Qué sucede si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ?<sup>1</sup>

**Ejercicio 2.** Sean  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias y  $X$  otra variable aleatoria no necesariamente definidas sobre un mismo espacio. Probar que  $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$  si y sólo si  $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$  para toda  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

**Ejercicio 3.**

- a) Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} \mathbb{1}_{(1, \infty)}(x).$$

Calcular aproximadamente  $P(\prod_{i=1}^n X_i > e^{55})$  con  $n = 100$ . *Sugerencia:* Hallar la distribución de  $\log X$ .

- b) Hallar  $n$  tal que la el error cometido sea menor a 0.1.

**Ejercicio 4.** Rehacer el ejercicio 6 de la práctica 8 utilizando el Teorema del Límite Central: pero donde se pide acotar la probabilidad, calcularla de manera aproximada. Comparar con la cota obtenida a partir de la desigualdad de Tchebychev.

<sup>1</sup>Observar que esto muestra que las fluctuaciones del promedio con respecto a su media son de orden  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  en el casos de variables aleatorias i.i.d. con varianza finita.

**Ejercicio 5.** Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada  $F$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $t \in \mathbb{R}$  se define la variable aleatoria<sup>23</sup>

$$F_n(t) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i \leq t\}}{n}.$$

- Probar que para todo  $t \in \mathbb{R}$  se satisface  $F_n(t) \xrightarrow{cs} F(t)$ .
- Mostrar que  $\sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, F(t)(1 - F(t)))$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución  $\mathcal{U}[0, \theta]$  para cierto  $\theta > 0$ . Probar que  $\sqrt{n}(\ln(2\bar{X}_n) - \ln(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 3^{-1})$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que  $\mathbb{E}(X_1) = 0$ ,  $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$  y  $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$ . Si para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \quad W_n = n \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2,$$

hallar el límite en distribución de las sucesiones  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetro  $\lambda$ . Hallar el límite en distribución de  $\sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - \lambda^2)$ .

**Ejercicio 9.** Sean  $X_n$  e  $Y_m$  dos variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros  $n$  y  $m$ , respectivamente. Probar que

$$\frac{(X_n - n) + (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, 1) \quad \text{cuando } n, m \rightarrow +\infty.$$

**Ejercicio 10.** Se realizan  $n$  ensayos Bernoulli en forma independiente, cada uno de ellos con probabilidad de éxito 0.6.

- Si  $n = 10^4$  Estimar la probabilidad de que se produzcan entre 7901 y 8100 éxitos. Acotar el error.
- Hallar  $n$  tal que el error cometido sea menor a 0.1.

<sup>2</sup>Observar que la aplicación  $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de distribución acumulada aleatoria, es decir, si definimos  $F_n : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $F_n(\omega, t) = F_n(t)(\omega)$  entonces para cada  $\omega \in \Omega$  la aplicación  $F_n(\omega, \cdot)$  es una función de distribución acumulada.

<sup>3</sup>A las funciones de distribución acumulada  $F_n$  se las conoce como *medidas empíricas* (o *funciones de distribución muestral*) y son estimadores de la función de distribución  $F$ . Valen resultados de convergencia de  $F_n$  a  $F$  aún más fuertes de los que se muestran aquí.