Práctica 8: Convergencias y Ley de los grandes números

Ejercicio 1. Sean X e Y variables aleatorias. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la variable aleatoria $Z_n = \frac{1}{n} \cdot X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot Y$. Hallar el límite en distribución de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 2. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y X variables aleatorias discretas a valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Mostrar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} p_n(k) = p(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 3. Sean $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes tales que vale $0 < p_n < 1$ y $\lambda_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$ y $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n$.

a) Si $X_n \sim Bi(k, p_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ con $X \sim Bi(k, p)$.

b) Si $Y_n \sim Ge(p_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ con $Y \sim \mathcal{G}(p)$.

c) Si $Z_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ con $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Ejercicio 4. Sea X_n una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p_n. Probar que si p_n tiende a cero cuando n tiende a infinito de manera tal que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Ejercicio 5. De un bolillero que contiene en su interior B bolillas blancas y N bolillas negras se extraen sucesivamente y sin reposición n de ellas. Sea $X_{B,N}$ la cantidad de bolillas blancas obtenidas.

a) ¿Cuál es la distribución de $X_{B,N}$?

b) Probar que si B y N tienden a infinito de modo tal que $\frac{B}{B+N} \to p$ entonces

$$X_{B,N} \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim Bi(n, p).$$

c) Establecer la convergencia en distribución del item b en términos de distribuciones conocidas. [1]

Ejercicio 6. Una máquina produce artículos de 3 clases: A, B y C en proporciones 25%, 25% y 50% respectivamente. Las longitudes de los artículos A y B siguen distribuciones $\mathcal{U}[0, 1]$ y $\mathcal{U}[0, 2]$ respectivamente y las longitudes de los artículos C se distribuyen según la densidad $f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) 1_{[0,2]}(x)$. Se eligen n artículos al azar de la producción total y se calcula el promedio de sus longitudes.

a) Dar una cota inferior para la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ si el tamaño de la muestra es $n = 100$.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ sea mayor o igual que 0.90?

[1] Este ejercicio muestra que si el número de bolillas en el bolillero tiende a infinito entonces sacar con o sin reposición pierde importancia. ¿Por qué será esto?

Ejercicio 7. Desigualdad de Tchebychev a un lado

a) Sea X una variable aleatoria con $\mathbb{E}(X) = 0$ y $\text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$. Probar que para todo $a > 0$ vale
$$P(X > a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$
Sugerencia: Observar que para todo $b > 0$ vale la desigualdad
$$P(X > a) = P(X + b > a + b) \leq P((X + b)^2 > (a + b)^2). \tag{1}$$
Aplicar la desigualdad de Markov en (1) y calcular el mínimo en b de la cota hallada.

b) Un conjunto de 200 personas (integrado por 100 mujeres y 100 hombres) se divide aleatoriamente en 100 pares de 2 personas cada uno. Utilizar la desigualdad de Tchebychev a una lado para hallar una cota superior para la probabilidad de que menos de 30 de estos pares estén formados por una mujer y un hombre. Comparar con la cota obtenida a partir de la desigualdad de Tchebychev original.

Ejercicio 8. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tal que $X_1 \equiv 0$ y para $n \geq 2$
$$P(X_n = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^3} & \text{si} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \\ 1 - \dfrac{2}{n^2} & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}$$
Probar que si $\alpha > \frac{1}{2}$ entonces
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n^\alpha} \xrightarrow{P} 0.$$
Sugerencia: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ejercicio 9. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $\lim_{n\to+\infty} \text{Var}(X_n) = 0$.

a) Probar que si $\mathbb{E}(X_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{P} 0$.

b) Probar que si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mu \in \mathbb{R}$ entonces $X_n \xrightarrow{P} \mu$.

Ejercicio 10. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria, todas ellas definidas sobre el mismo espacio.

a) Escribir el conjunto $\{X_n \to X\}$ en términos de eventos de la forma $\{|X_n - X| \leq \alpha\}$ con $\alpha > 0$ y verificar que es un evento perteneciente a la σ-álgebra $\mathcal{F}$.

b) Escribir el conjunto $\{X_n \nrightarrow X\}$ en términos de numerables eventos de la forma $\{|X_n - X| > \alpha\}$ con $\alpha > 0$.

c) Verificar que $\{X_n \to X\} = \{X_n - X \to 0\}$.

d) Sea $L^+ = \limsup_{n\to+\infty} X_n$, i.e., para cada $\omega \in \Omega$ se define $L^+(\omega) = \limsup_{n\to+\infty} X_n(\omega)$.

i. Para cada $\alpha > 0$ escribir el conjunto $\{L^+ \geq \alpha\}$ en términos de numerables eventos de la forma $\{X_n > r$ para infinitos valores de $n\}$ con $r \in \mathbb{R}$ y verificar que es un evento perteneciente a la σ-álgebra $\mathcal{F}$. Deducir que L^+ es una variable aleatoria.

ii. Para cada $\alpha > 0$ escribir el conjunto $\{L^+ > \alpha\}$ en términos de numerables eventos de la forma $\{X_n > r$ para infinitos valores de $n\}$ con $r \in \mathbb{R}$ y verificar que es un evento perteneciente a la σ-álgebra $\mathcal{F}$.

e) Demostrar afirmaciones análogas a las del ítem *d)* para $L^- = \liminf_{n\to+\infty} X_n$.

Ejercicio 11. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\varepsilon(1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Y_n = \frac{X_n}{\log(n+1)}.$$

a) Probar que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

b) Probar que $P(L^+ = 1) = 1$, donde $L^+ := \limsup_{n\to+\infty} Y_n$.

c) Probar que $P(L^- = 0) = 1$, donde $L^- := \liminf_{n\to+\infty} Y_n$.

d) Deducir de los ítems anteriores que la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene límite casi seguro.

Ejercicio 12. Se elige al azar un número X en el intervalo $[0, 1]$.[2]

a) Dados $k \in \mathbb{N}$ y una secuencia ordenada de k dígitos $(a_1, \ldots, a_k) \in \{0, \ldots, 9\}^k$, calcular la probabilidad para cada $n \in \mathbb{N}$ de que dicha secuencia coincida con la de los dígitos del desarrollo decimal de X entre los lugares n y $n + k - 1$.

b) Dados $k \in \mathbb{N}$ y una secuencia ordenada de k dígitos $(a_1, \ldots, a_k) \in \{0, \ldots, 9\}^k$, calcular la probabilidad de que dicha secuencia aparezca infinitas veces en el desarrollo decimal de X.

c) Calcular $P(\text{Ocurren infinitos } A_n)$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el evento A_n como

$$A_n = \{\text{El 9 aparece } n \text{ veces consecutivas en los } 2n \text{ primeros lugares del desarrollo decimal de } X\}.$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que X sea racional?

Ejercicio 13. Se tira infinitas veces una moneda de manera independiente y con probabilidad p de obtener cara en cada lanzamiento.

a) Dado $k \in \mathbb{N}$ calcular la probabilidad de obtener infinitas rachas de k caras consecutivas.

b) Sea A_n el evento de obtener una racha de caras consecutivas de longitud no menor que n entre los lanzamientos 2^n y $2^{n+1} - 1$. Probar que

$$P(\text{Ocurren infinitos } A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } p \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sugerencia: Si $p \geq \frac{1}{2}$ entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - (1 - p^n)^{\left[\frac{2^n}{n}\right]}\right) = +\infty$.

[2] Si un número admite dos desarrollos decimales se optará por el finito. Por ejemplo, se tomará 0.745 y no $0.744\hat{9}$.

Ejercicio 14.

a) Probar que una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilidad a una variable aleatoria X si y sólo si toda subsucesión de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene otra subsucesión que converge casi seguramente a X[3].

b) Probar que si toda subsucesión de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene otra subsucesión que converge casi seguramente a X no es cierto que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi seguramente a X.

Ejercicio 15. Una colección $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de variables aleatorias se dice *acotada en probabilidad* o *tight* si dado $\varepsilon > 0$ existe un compacto K_ε tal que

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} P(X_i \notin K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

a) Probar que toda colección finita de variables aleatorias es acotada en probabilidad.

b) Mostrar que una familia infinita de variables aleatorias no es necesariamente acotada en probabilidad.

c) Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X_0 una variable aleatoria tal que $X_n \xrightarrow{P} X_0$. Probar que la familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ está acotada en probabilidad.

Ejercicio 16. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de variables aleatorias.

a) Probar que si $X_n \xrightarrow{P} 0$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en probabilidad entonces $X_nY_n \xrightarrow{P} 0$.

b) Probar que si $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} Y$ entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$ y que $X_nY_n \xrightarrow{P} XY$.

Ejercicio 17. Sean $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores aleatorios sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{X}_0$ otro vector aleatorio sobre $\mathbb{R}^n$.

a) Probar que si $\mathbf{X}_k \xrightarrow{P} \mathbf{X}_0$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua entonces $g(\mathbf{X}_k) \xrightarrow{P} g(\mathbf{X}_0)$. *Sugerencia:* Tener presente que $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión acotada en probabilidad y que toda función continua es uniformemente continua sobre compactos.

b) Probar que si $\mathbf{X}_k \xrightarrow{cs} \mathbf{X}_0$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua entonces $g(\mathbf{X}_k) \xrightarrow{cs} g(\mathbf{X}_0)$.

Ejercicio 18. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias.

a) Supongamos que $X_n \xrightarrow{P} k$ para cierta constante $k \in \mathbb{R}$ no nula. Se define la sucesión $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $Z_n = 1_{\{X_n\neq 0\}}\frac{1}{X_n}$. Probar que Z_n es una variable aleatoria para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $Z_n \xrightarrow{P} \frac{1}{k}$. Adoptaremos la notación $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{k}$ para referirnos a este hecho.

b) Supongamos que $X_n \xrightarrow{P} X$ con $P(X = 0) = 0$. Se define la sucesión $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el ítem anterior. Probar que $Z_n \xrightarrow{P} Z$, donde $Z = 1_{\{X\neq 0\}}\frac{1}{X}$. Adoptaremos la notación $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{X}$ para referirnos a este hecho.

   Sugerencia: Observar que $\frac{X_n}{X} \xrightarrow{P} 1$ y aplicar el resultado establecido en el ítem anterior.

[3]En particular, toda sucesión de variables aleatorias que converge en probabilidad tiene una subsucesión que converge casi seguramente.

Ejercicio 19. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[0,1]$. Hallar el límite casi seguro de la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ la variable aleatoria Y_n se define como

$$Y_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}.$$

Ejercicio 20. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(X^2) = 2$ y $\mathbb{E}(X^4) < +\infty$. Probar que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \xrightarrow{cs} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 21. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con $\mathbb{E}(|X_1|) = +\infty$.

a) Probar que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(|X_n| > kn) = +\infty$.

b) Probar que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{n} = +\infty$.

c) Deducir que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{n} = +\infty$, donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

d) Concluir del ítem anterior que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} \mu$ para cierto $\mu \in \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$.