

PRÁCTICA 7: DISTRIBUCIONES CONDICIONALES Y ESPERANZA CONDICIONAL

Ejercicio 1.

- a) Sean X e Y variables aleatorias independientes con $X \sim Bi(n, p)$ e $Y \sim Bi(m, p)$, respectivamente. Probar que $X|X + Y = k \sim \mathcal{H}(m + n, n, k)$ y hallar $E(X|X + Y = k)$.
- b) Sean X e Y dos variables aleatorias definidas en un mismo espacio con $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ para $\lambda > 0$. Probar que $X|X + Y = k \sim Bi(k, p)$ para cierto $0 < p < 1$ si y sólo si X e Y son independientes y tienen distribución $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\lambda(1 - p))$, respectivamente.

Ejercicio 2. Se tienen dos urnas numeradas 0 y 1 con bolas blancas y negras, con 10 bolas cada una. La urna 0 tiene un 2 bolas blancas, mientras que la urna 1 tiene 7 bolas blancas.

- a) Se elige una urna al azar. Luego sacamos de ella, con reposición, 5 bolas. Definimos las variables aleatorias

$$X = \text{cantidad de bolas blancas obtenidas en las 5 extracciones.}$$

$$Y = \text{urna elegida.}$$

Calcular $\mathbb{E}(X|Y = 0)$, $\mathbb{E}(X|Y = 1)$ y $\mathbb{E}(X)$. Compararlas entre sí.

- b) Ahora cambiamos el procedimiento. Elegimos una urna al azar, y de ella extraemos 1 bola, que luego reponemos en la urna correspondiente. Luego repetimos el experimento 5 veces, de manera independiente. Sea X = cantidad de bolas blancas obtenidas en las 5 extracciones. Hallar $\mathbb{E}(Z)$ y compararla con la $\mathbb{E}(X)$ hallada en el ítem anterior.

Ejercicio 3. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se define la varianza condicional de X dada Y como la variable aleatoria

$$\text{Var}(X|Y) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|Y))^2 \middle| Y\right).$$

Probar que

$$\text{Var}(X) = \text{Var}[E(X|Y)] + \mathbb{E}(\text{Var}(X|Y)).$$

Ejercicio 4. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y X e Y variables aleatorias en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- a) Supongamos que (X, Y) es un vector discreto con probabilidad conjunta p_{XY} . Sea $g : \mathcal{R}_Y \rightarrow \mathbb{R}$ medible Borel tal que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$ y definamos $\sigma^2 : \mathcal{R}_Y \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula

$$\sigma^2(y) = \sum_{x \in \mathcal{R}_X} (x - g(y))^2 p_{X|Y=y}(x).$$

Es decir, para cada $y \in \mathcal{R}_Y$, $\sigma^2(y)$ denota la varianza condicional de X dado el evento $\{Y = y\}$. Probar que $\text{Var}(X|Y) = \sigma^2(Y)$.

- b) Supongamos que (X, Y) es un vector absolutamente continua con función de densidad conjunta f_{XY} . Si $\text{sop}(Y) = \{y \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y) dx > 0\}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible Borel es tal que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$ definamos $\sigma^2 : \text{sop}(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ por la fórmula

$$\sigma^2(y) = \int_{\mathbb{R}} (x - g(y))^2 f_{X|Y=y}(x) dx.$$

Probar que $\text{Var}(X|Y) = \sigma^2(Y)$.

Observación. Este ejercicio nos presenta una receta para calcular varianzas condicionales en términos de las distribuciones condicionales. Mediante la ecuación a probar en el ejercicio 3, esto nos permite calcular de manera eficiente varianzas a partir de las distribuciones condicionales.

Ejercicio 5. Sean X e Y variables aleatorias definidas en un mismo espacio con Y discreta. Probar que $E(X|Y) = g(Y)$ donde $g : \mathcal{R}_Y \rightarrow \mathbb{R}$ se define para cada $y \in \mathcal{R}_Y$ mediante la fórmula

$$g(y) = \frac{1}{P(Y = y)} \mathbb{E}(X 1_{\{Y=y\}}).$$

Ejercicio 6. Sean X e Y variables aleatorias tales que para cada $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $P(Y \leq y|X)$ es una constante $F(y)$ que no depende de X . Probar que $F_Y(y) = F(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y que X e Y son independientes.

Ejercicio 7. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con esperanza y varianza finitas y N una variable aleatoria a valores en \mathbb{N} con esperanza y varianza finitas e independiente de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Probar que $\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1)$.

b) Probar que

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = \mathbb{E}(N) \text{Var}(X_1) + \mathbb{E}^2(X_1) \text{Var}(N).$$

- c) El número de reclamos recibido por una compañía de seguros en una semana es una variable aleatoria Poisson de parámetro λ . El monto pagado por cada uno de esos reclamos es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 . Hallar la esperanza y la varianza del total pagado por la compañía en concepto de reclamos en una semana. ¿Qué hipótesis se están haciendo? ¿Son razonables?

Ejercicio 8. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias discretas independientes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Observar que S_n es una variable discreta para todo $n \in \mathbb{N}$.

- a) Dados números naturales $k < n < m$, mostrar que S_k y S_m son condicionalmente independientes dado S_n , i.e., para todo $x_k \in \mathcal{R}_{S_k}$ y $x_m \in \mathcal{R}_{S_m}$ se verifica

$$P(S_k = x_k, S_m = x_m | S_n) = P(S_k = x_k | S_n) P(S_m = x_m | S_n).$$

Sugerencia: Mostrar que $P(S_k = x_k, S_m = x_m | S_n = x_n) = P(S_k = x_k | S_n = x_n) P(S_m = x_m | S_n = x_n)$ para todo $x_n \in \mathcal{R}_{S_n}$.

- b) Mostrar que si $\mathbb{E}(X_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces dados $n < m$ se verifica $\mathbb{E}(S_m | S_n) = S_n$.

Ejercicio 9. La llegada de un tren a la estación se produce con distribución uniforme entre las 10 am y las 10:20 am. La partida del mismo se produce con distribución uniforme entre su llegada y las 11 am. Sean X la hora de llegada de dicho tren e Y la hora de su partida.

- a) Calcular $\mathbb{E}(Y)$ y $\text{Cov}(X, Y)$.
- b) Hallar la función de densidad de Y .
- c) Calcular la probabilidad de que el tren haya llegado a la estación entre las 10:10 am y las 10:15 am sabiendo que partió después de las 10:25 am.

Ejercicio 10.

- a) Sean X e Y dos variables aleatorias definidas en un mismo espacio con $X + Y \sim \Gamma(2, \lambda)$ para $\lambda > 0$. Probar que $X|X + Y = z \sim \mathcal{U}[0, z]$ para todo $z > 0$ si y sólo si X e Y son independientes y tienen distribución $\mathcal{E}(\lambda)$.
- b) Sean X y Z variables aleatorias que satisfacen $Z \sim \Gamma(2, 1)$ y $X|Z = z \sim \mathcal{U}[0, z]$ para todo $z > 0$.
 - i) Calcular $P(Z \geq 2|X \leq 1)$.
 - ii) Calcular $P(Z - X \geq 2|X \leq 1)$.

Ejercicio 11. Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional tal que $f_{X|Y=y}(x) = \frac{3x^2}{y^3} \mathbb{1}_{(0,y)}(x)$ y $f_Y(y) = 5y^4 \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$.

- a) Calcular la función de densidad del cociente $\frac{X}{Y}$ y probar que es independiente de Y sin apelar al teorema de cambio de variables.
- b) Hallar la densidad condicional $f_{Y|X=x}$ para cada $x \in (0, 1)$.

Ejercicio 12. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \sim \mathcal{U}[2, 3]$ y para cada $y \in [2, 3]$ se verifica

$$p_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{3-y}{2} & \text{si } x = -1 \\ y - 2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{3-y}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- a) Hallar p_X .
- b) Calcular la función de distribución $F_{Y|X=x}(y)$ para cada $x \in \mathcal{R}_X$.

Ejercicio 13. Sean X e Y variables aleatorias tales que X es discreta con distribución dada por $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$ y $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{4}$, y la distribución condicional de Y dada X es $\varepsilon(X)$.

- a) Calcular $F_Y(y)$ y $f_Y(y)$.
- b) Calcular $P(X = x, Y \leq y)$ para $y > 0$ y $x \in \mathcal{R}_X$.
- c) Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ sea $g_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación medible Borel tal que $P(X = x|Y) = g_x(Y)$. Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ expresar $P(X = x, Y \leq y)$ en términos de g_x .
- d) Para cada $x \in \mathcal{R}_X$ calcular explícitamente $P(X = x|Y)$.