PRÁCTICA 11: ESTADÍSTICA

Ejercicio 1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma)$. Obtener los estimadores de máxima verosimilitud (EMV) de

a) μ con $\sigma^2 = \sigma_0^2$ conocida

b) σ con $\mu = \mu_0$ conocida

c) μ y σ^2

Ejercicio 2. Consideremos muestras aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ para cada una de las siguientes distribuciones:

i) exponencial de parámetro θ

ii) Poisson de parámetro θ

iii) con densidad

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} x^{(\frac{1}{\theta}-1)} I_{[0,1]}(x), \theta > 0$$

a) Encontrar en cada caso el estimador de máxima verosimilitud y el de momentos de θ.

b) En los dos primeros casos y para el estimador de máxima verosimilitud del tercero, decir si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados.

c) Decir si los estimadores obtenidos son consistentes. Justificar.

Ejercicio 3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución discreta Y a valores $y_1, \ldots, y_k$ con probabilidad $p_1, \ldots, p_k$, respectivamente.

a) Obtener el EMV para los valores $p_1, \ldots, p_k$ en el caso en que $p_1, \ldots, p_k > 0$ y en la muestra se observaron todos los valores posibles de Y.

b) ¿Podría suceder que se observara el valor y_1 en la muestra y que p_1 sea 0?

c) Supóngase que y_1 no fue observado en la muestra, mientras que sí fueron observados los valores restantes. Obtener el EMV para los valores $p_1, \ldots, p_k$ en el caso en que $p_1 \geq 0, p_2 > 0, \ldots, p_k > 0$.

d) Concluir para el caso en que $p_1, \ldots, p_k \geq 0$ que los estimadores estan dado por

$$\hat{p}_j = \frac{\sum_{i=1}^n 1_{y_j}(X_i)}{n} = \frac{\#\{i : X_i = y_j\}}{n}$$

Ejercicio 4. Se define el error cuadrático medio de un estimador $\hat{\theta}$ como

$$ECM(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

a) Verificar que $\text{ECM}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + \left(\text{sesgo}(\hat{\theta})\right)^2$ donde $\text{sesgo}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$.

b) ¿Cuánto vale $\text{ECM}(\hat{\theta})$ si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ?