Práctica 10: Procesos de Poisson y cadenas de Markov

Ejercicio 1. El número de llamadas por minuto que llegan a una central telefónica sigue un proceso de Poisson. Se sabe que la probabilidad de que llegue al menos una llamada en un intervalo de un minuto de duración es $1 - e^{-2}$.

a) Hallar la intensidad o parámetro del proceso de Poisson.

b) Calcular la probabilidad de que lleguen a lo sumo 2 llamadas en un intervalo de 3 minutos.

c) Calcular la probabilidad de que la primer llamada tarde menos de 10 segundos en llegar.

d) Si dividimos un intervalo de 10 minutos en períodos consecutivos de un minuto, ¿cuál es la probabilidad de que en exactamente tres de estos períodos no llegue ninguna llamada?

Ejercicio 2. Suponga que el número de goles que marca un equipo de fútbol puede ser descrito por un proceso de Poisson. Considere los siguientes equipos (procesos independientes): A, con tasa λ_A de goles por partido, y B, con tasa λ_B de goles por partido.

a) Si se enfrentan A y B, ¿Cuál es la probabilidad de que A gane 2 a 1?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en total conviertan más de 4 goles?

c) Suponga que ha transcurrido el primer tiempo entre A y B, si se sabe que A va ganando 2 a 0, ¿cuál es la probabilidad de que el primer gol haya sido antes de 15 minutos y el segundo antes de 30 minutos?

d) Dado que se hizo al menos un gol, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya convertido A?¿Y el segundo?

e) Suponga que el partido en su tiempo reglamentario (90 min.) quedó igualado 3 a 3. Sin embargo, es necesario definir el ganador, para ello se utilizará la modalidad "gol de oro", es decir, el primero que marca el gol gana. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido se prolongue por más de 45 minutos?

Ejercicio 3. ¿Cuándo el pollo cruzó la calle? Suponga que el tráfico de una calle sigue un PP de tasa λ autos por minuto. Un pollo necesita una pausa en el tráfico de al menos c minutos para cruzar. Para calcular el tiempo que el pollo debe esperar para cruzar la carretera, sean $t_1, t_2, \ldots$ el tiempo entre llegadas para los autos y $J = \min\{j : t_j > c\}$. Si $T_n = t_1 + \cdots + t_n$, entonces el pollo empezará a cruzar al tiempo T_{J-1} y completará su viaje al tiempo $T_{J-1} + c$. Muestre que $\mathbb{E}(T_{J-1} + c) = (e^{\lambda c} - 1)/\lambda$.

Ejercicio 4. Juan almuerza en el comedor de la facultad todos los días de semana. Las opciones son milanesa, ensalada o pastas. Sus probabilidades de transición están dadas por

	M	E	P
M	0,15	0,6	0,25
E	0,4	0,1	0,5
P	0,1	0,3	0,6

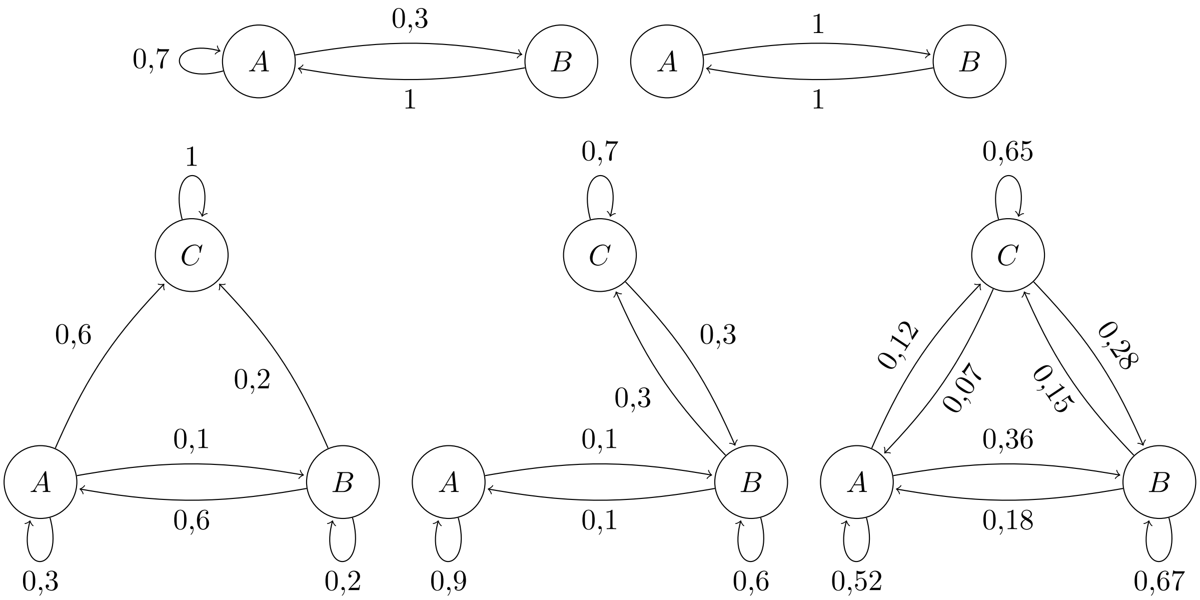
Sabemos que el lunes Juan comió milanesas.

a) ¿Cuáles son las probabilidades para la comida del viernes?

b) ¿Cuáles son las probabilidades a largo plazo?

Ejercicio 5. Probar que en una cadena con dos estados y matriz de transición $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ para $a, b \in (0,1)$, la única distribución estacionaria será $\pi = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$.

Ejercicio 6. Considerar las representaciones de la figura:



Para cada cadena explicitar la matriz asociada, decidir si admite distribución estacionaria (y en caso afirmativo, hallarla).

Ejercicio 7. Un profesor de sociología postula que en cada década, el 8% de las mujeres trabajadoras deja de trabajar, y que el 20% de las mujeres que no trabajaban empiezan a hacerlo. Comparar las predicciones de este modelo con los siguientes datos sobre los porcentajes de mujeres trabajadoras: 43.3% en 1970, 51.5% en 1980, 57.5% en 1990, y 59.8% en 2000. En un futuro lejano, ¿Qué fracción de mujeres estará trabajando?

Ejercicio 8. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí duerme, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si es necesario. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0,4, la de tener que viajar a B es 0,4 y la de tener que ir a A es 0,2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20% tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0,2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad de 0,1, irá a B con una probabilidad de 0,3 y a C con una probabilidad de 0,6.

a) Si hoy el viajante está en C , ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?