

## EJERCICIOS PARA PENSAR

**Ejercicio 1.** Tenemos una moneda balanceada (con la misma probabilidad de cara y ceca). La moneda es lanzada repetidas veces hasta obtener cara por primera vez. ¿Cuál es el número esperado<sup>1</sup> de veces que vamos a lanzar la moneda?

**Ejercicio 2.** (Coleccionista de cupones) Un álbum tiene  $N$  figuritas distintas. En el quiosco se pueden comprar las figuritas de a una, siempre te dan una figurita totalmente al azar y cualquiera tiene la misma probabilidad de salir. ¿Cuál es el número esperado de figuritas que debemos comprar para completar el álbum?

**Ejercicio 3.** (Paradoja del cumpleaños) En un grupo aleatorio de 23 personas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas del grupo cumplan años el mismo día?

**Ejercicio 4.** (Problema de la secretaria) Para un único puesto hay  $N$  aspirantes. Los candidatos se pueden ordenar de mejor a peor sin ambigüedad. Son entrevistados secuencialmente en orden aleatorio. El objetivo del reclutador es contratar al mejor candidato. Luego de una entrevista el reclutador solo sabe si el candidato es el mejor de los entrevistados por el momento o no. Al finalizar la entrevista debe decidir si contratar a ese candidato o no. Una vez que se desecha un aspirante, este no puede ser contratado más tarde.

El reclutador elige  $c$ , rechaza a los primeros  $c$  aspirantes y luego contrata al primero que sea el mejor entrevistado por el momento. Siguiendo esta estrategia, ¿cuál es la probabilidad de contratar al mejor candidato? ¿Qué estrategia debe seguir el reclutador para maximizar la probabilidad de contratar al mejor candidato? ¿Cuál es el límite de dicha probabilidad cuando  $N \rightarrow \infty$ ?

**Ejercicio 5.** Doob se anota un número distinto en cada mano y las cierra de manera que Kolmogorov no los vea. Luego, K elige una mano y D le muestra el número escrito en esa mano. A continuación K debe adivinar en qué mano está escrito el número más grande. Demostrar que K tiene una estrategia que le asegura tener probabilidad mayor a un medio de ganar independientemente de lo que haga D.

**Ejercicio 6.** (La ruina del apostador) Juan va al casino con \$100. Juega repetidamente a un juego donde paga \$1 cada vez para jugar. Si gana, se lleva \$2 y si pierde, no se lleva nada. En cada apuesta tiene la misma probabilidad de ganar que de perder. Deja de jugar cuando llega a tener \$101, y se va contento de que “le ganó al casino”, o cuando se queda sin dinero. Determinar la probabilidad de que Juan le gane al casino.

**Ejercicio 7.** (Monty Hall) En un concurso se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un auto, y detrás de las otras, cabras. Elegis una puerta y luego el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra mostrando una cabra. Entonces te pregunta: “¿Querés cambiar tu elección?” ¿Qué debes hacer?

<sup>1</sup>Formalmente aquí nos referimos a la esperanza en el sentido matemático. Sin embargo no necesitamos una definición formal para entender la pregunta. Basta pensar en el valor promedio que obtendríamos a lo largo de muchas repeticiones del experimento.

**Ejercicio 8.** En un truelo se enfrentan tres contendientes: A, B y C. El objetivo de cada uno es eliminar a los otros dos. Se sabe que cada vez que tira A acierta un tercio de las veces, B lo hace dos de cada tres y la puntería de C es infalible, acierta siempre.

Los contendientes tirarán secuencialmente en orden A, B, C; para recomenzar cíclicamente. ¿Cuál es la mejor estrategia para A? ¿Cuál es su probabilidad de ganar?

**Ejercicio 9.** Consideremos el conjunto de matrices reales cuyas entradas son 0 y 1. Sorteamos en este conjunto una matriz de manera que todas tienen la misma probabilidad. ¿Cuál es la esperanza para el determinante?

**Ejercicio 10.** A una fiesta concurren  $N$  personas, cada una con un sombrero. Al ingresar a la fiesta cada persona deja su sombrero en una caja grande situada en la entrada del salón. Cuando finaliza el evento, las  $N$  personas se dirigen a la entrada del salón y extraen un sombrero al azar de la caja. Aquellas personas que sacan su propio sombrero se retiran de la fiesta. El resto vuelve a colocar los sombreros que extrajeron en la caja y luego cada uno de los todavía presentes extrae nuevamente un sombrero al azar. Este procedimiento se repite hasta que las  $N$  personas se hayan retirado de la fiesta. Calcular la esperanza de la cantidad de interacciones que fueron necesarias hasta conseguir que las  $N$  personas se retiraran de la fiesta con su sombrero.

**Ejercicio 11.** Una persona tiene cuatro paraguas, algunos en su oficina y otros en su casa. Si al salir de su casa a la mañana, o del trabajo a la noche, está lloviendo y en el lugar en el que está hay un paraguas disponible, se lo lleva. Si no hay, se moja. Supongamos que, independientemente del pasado, la probabilidad de que llueva en cada viaje es  $p$ , con  $0 < p < 1$ . ¿Cuál es la fracción del tiempo que la persona se moja (asintóticamente)?

**Ejercicio 12.** Un mono pulsa teclas al azar de una máquina de escribir indefinidamente. ¿Cuál es la probabilidad de que eventualmente escriba ABRACADABRA?

**Ejercicio 13.** Se eligen tres puntos aleatoriamente en el círculo unitario. Estos determinan tres arcos, ¿cuál es la esperanza de la longitud del arco que contiene al  $(1,0)$ ?

**Ejercicio 14.** Se eligen dos puntos aleatoriamente en el intervalo  $[0, 1]$ . Estos determinan tres segmentos, ¿cuál es la probabilidad de que se pueda formar un triángulo con dichos segmentos?

### Algunas preguntas extras:

**Ejercicio 1:** ¿y si la probabilidad de que salga cara es  $p$  ( $0 < p < 1$ )?

**Ejercicio 2:** ¿y si las figuritas vienen en paquetes de 5 (que no tienen repetidas)?

**Ejercicio 6:** ¿y si la probabilidad de ganar en cada apuesta es  $p$  ( $0 < p < 1$ )?

**Ejercicio 12:** ¿Cuál es la esperanza para el tiempo que demora en tipear ABRA-CADABRA el mono?

