Clases Prácticas

Clase 1: repaso de combinatoria
Hicimos un breve y rápido repaso de combinatoria. Dejo como referencia las notas de combinatoria de Susana Puddu.

Ejercicio 1. Ana, Beto y Carola trabajan de lunes a viernes en una pizzería. Cada uno de ellos tiene un día franco por semana (o sea sólo trabaja 4 días de la semana).

a) ¿De cuántas maneras distintas pueden elegir sus francos?

b) ¿De cuántas maneras pueden elegir sus francos si cada día hábil tiene que haber al menos dos de ellos trabajando?

Ejercicio 2. ¿Cuántas patentes distintas de 3 letras y 3 números se pueden formar? Recordar que hay 26 letras en el abecedario. ¿Cuántas patentes hay que tengan:

a) todas las letras distintas y todos los números distintos?

b) al menos una A?

c) exactamente una A?

Ejercicio 3. En un casamiento, 6 hombres y 4 mujeres se están por sacar una foto,

a) ¿Cuántas fotos distintas pueden hacerse si se los ordena en fila?

b) ¿Cuántas en que todos los varones estén juntos a la derecha de todas las mujeres?

Ejercicio 4. Del grupo de 10 personas del ejemplo anterior, se eligen 6 que se ponen en orden para sacarse otra foto.

a) ¿Cuántas fotos distintas pueden sacarse?

b) Y si no interesa el orden de la foto sino cuales son los 6 elegidos para la foto, cuántas elecciones distintas hay

Ejercicio 5. El entrenador de la selección de futbol cuenta con un plantel de 23 jugadores, de los cuales hay 3 arqueros, 8 defensores, 6 mediocampistas y 6 delanteros. Tiene que decidir cuáles son los 11 jugadores que saldrán a la cancha. Debe elegir 1 arquero, 4 defensores, 4 mediocampistas y 2 delanteros. ¿De cuántas maneras puede elegir los 11 titulares?

Ejercicio 6. En un concurso literario participan 40 escritores. Cada jurado debe elegir las 3 mejores obras y las 2 peores (en ambos casos sin darles un orden). ¿Cuántas posibles elecciones distintas tiene cada jurado?

Ejercicio 7. Se tienen n cajas numeradas de 1 a n.

a) ¿De cuántas formas se pueden distribuir k bolitas indistinguibles entre sí en las cajas?

b) ¿De cuántas formas se pueden distribuir k bolitas numeradas de 1 a k en las cajas?

Ejercicio 8. ¿De cuántas maneras pueden formar n parejas $2n$ personas?

Clase 2 y 3: definición clasica de Laplace

Ejercicio 1. Se tiran dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que sumen 6?

Ejercicio 2. ¿Cuál es la probabilidad de tener flor en el truco? Es decir, tener 3 cartas del mismo palo de un mazo con 40 cartas con 10 de cada palo.

Ejercicio 3. Calcular la probabilidad de que al extraer dos cartas de un mazo de 40 cartas españolas

a) ambas sean pares.

b) una sea par y la otra impar.

c) ambas tengan la misma paridad.

d) salga al menos un dos.

Ejercicio 4. Se extraen 5 cartas de un mazo de 48 cartas españolas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 de un número y 2 de otro?

Ejercicio 5. Se extraen 10 cartas de un mazo de 48 cartas españolas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 9 sean del mismo palo?

Ejercicio 6. Jugando al chinchon sin comodines se extraen 7 cartas de un mazo de 48 cartas españolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de tener 10, 11 y 12 del mismo palo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de tener chinchon (todas las cartas del mismo palo en escalera)?

c) ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 3 del mismo número?

Ejercicio 7. Ana y Beto se enfrentaron en un juego: Ana ganó n veces y Beto m veces. Una racha es una sucesión consecutivo de triunfos de uno de los competdores. Por ejemplo si $n = 3$ y $m = 6$: BBABBBAAB tiene 2 rachas de Ana y 3 de Beto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de Ana tenga exactamente r rachas?

b) Probar que

$$P(\text{cantidad total de rachas sea } 2k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-1}}{\binom{m+n}{n}}$$

Ejercicio 8. Al llegar a una fiesta cada uno de los n invitados dejo su sombrero en un caja. Al irse agarraron un sombrero de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno tenga su sombrero?

Ejercicio 9. Se lanzan 15 dados. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga alguno de los 6 números?

Clase 4: probabilidad condicional y total

Ejercicio 1. En cierta población, dos tercios de las personas son mujeres. Dentro de las mujeres un séptimo del total son zurdas mientras que dentro de los hombres un quinto lo son.
¿Cuál es la probabilidad de ser

a) una mujer zurda?

b) diestro?

c) mujer dado que sos diestro?

d) un hombre zurdo dado que no sos una mujer diestra?

Ejercicio 2. En una urna hay B bolitas blancas y N bolitas negras. Se extraen dos bolitas sin reposición. Hallar la probabilidad de que

a) la primera sea blanca

b) la primera sea blanca y la segunda negra

c) la segunda sea negra sabiendo que la primera fue blanca

d) la segunda sea negra

e) la primera sea blanca sabiendo que la segunda fue negra

Ejercicio 3. Una compañía de seguros divide a sus clientes en tres categorías según su riesgo: alto, medio y bajo. Un 20% de los clientes son de alto riesgo, un 30% de medio y un 50% de bajo riesgo. La probabilidad de que un cliente tenga un accidente este año es 0.25 para los de alto riesgo, 0.16 para los de medio y 0.10 para los de bajo riesgo.
Hallar la probabilidad de que

a) un cliente al azar tenga un accidente este año.

b) un cliente sea de alto riesgo dado que ha tenido un accidente este año.

Ejercicio 4. Se tienen dos urnas con bolitas,

- Urna I: 3 B y 2 N.
- Urna II: 1 B y 4 N.

Se extrae una bolita de la primer urna y se la coloca en la segunda. Luego, se extrae una bolita de la segunda urna.
Hallar la probabilidad de

a) sacar una bolita negra en la segunda extracción.

b) haber sacado una bolita negra en la primer extracción dado que en la segunda sacamos una blanca.

Ejercicio 5. Se tira un dado y luego se arroja una moneda tantas veces como el número obtenido. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente tres caras?

Ejercicio 6. Ana tira una moneda $k+1$ veces y Beto, k veces. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana obtenga más caras?

Clase 5: independencia

Ejercicio 1. Se tiran dos dados equilibrados. Consideremos los eventos:

$$A=\{\text{La suma de los dados da 6}\} \quad B=\{\text{La suma de los dados da 7}\}$$
$$C=\{\text{El primer dado es un 4}\} \quad D=\{\text{El segundo dado es un 3}\}$$

¿Son independietes C y D? ¿A y C? ¿B y C? ¿B y D? ¿Qué sucede con B y $C \cap D$?

Ejercicio 2. Ana y Beto juegan al siguiente juego. Ana tira un dado repetidamente hasta obtener un 1 por primera vez. Obtiene un punto por cada vez que tiro el dado. Beto tira una moneda repetidamente hasta obtener una cara. Obtiene un punto por cada vez que tiro la moneda. Beto gana si tiene más puntos que Ana. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Beto?

Ejercicio 3. Caro y Dani juegan al siguiente juego. Comienza Caro y tira un dado, si saca un 1 gana, de lo contrario le pasa el turno a Dani. Dani tira una moneda y si saca cara gana. Si saca ceca el juego continua con Caro tirando un dado. De esta manera Caro y Dani juega alternadamente hasta que alguno gana. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Caro?

Ejercicio 4. El pase inglés, es un juego de azar de casino. En cada ronda se lanzan dos dados y el resultado del juego depende de la suma de los números de los dados. Si la suma es 7 u 11 ("natural") el jugador gana y si la suma es 2, 3 o 12 ("craps") el jugador pierde. Si la suma es otro valor ese valor determina el punto, y en este caso se vuelve a lanzar repetidamente hasta que vuelva a salir el punto en cuyo caso el jugador gana o salga un 7, caso en el que el jugador pierde. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador gane?

Clase 6: distribuciones clasicas discretas

Ejercicio 1. Si tres eventos son independientes dos a dos, ¿son necesariamente conjuntamente independientes?

Ejercicio 2. Un alumno debe rendir un examen múltiple choice de 10 preguntas, con 3 respuestas cada una. Al contestar, sabe la respuesta con probabilidad $\frac{2}{5}$ y, si no la sabe, responde al azar.

a) Si el examen se aprueba con al menos 6 respuestas correctas, calcular la probabilidad de que apruebe.

b) Calcular la probabilidad de tener que recuperar el examen exactamente 3 veces.

c) Calcular la probabilidad de tener que recuperar el examen al menos 2 veces.

Ejercicio 3. El mismo alumno que en el problema anterior, ahora rinde el examen con otro criterio de aprobación: contesta preguntas hasta obtener 6 correctas. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe el examen en la décima pregunta?

Ejercicio 4. Una urna tiene 5 bolitas blancas y 10 bolitas negras. Se extrae de ella una muestra de 5 bolitas. Hallar la probabilidad de obtener exactamente 2 blancas.

Ejercicio 5. Un vendedor debe entregar 3 productos. Los productos los tiene en dos lotes distintos:

- Lote A: 8 buenos, 4 defectuosos y 2 rotos.
- Lote B: 10 buenos, 6 defectuosos y 3 rotos.

Para elegir de qué lote sacar los productos, el vendedor tira un dado. Si sale 2 o 5 los saca del lote A y si no, del lote B. Calcular la probabilidad de que el vendedor entregue un producto roto.

Ejercicio 6. Sea X una v.a. con función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{5} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

a) Hallar p_X, la función de probabilidad puntual de X.

b) Calcular $\mathbb{P}(X \in [0;2])$ y $P(X < 2)$.

Ejercicio 7. Sea la función

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{5} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 3 < x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) ¿Existe una variable aleatoria X tal que $F_X = F$?

b) Si existe, ¿es X discreta? ¿continua?

c) Calcular $\mathbb{P}(x \in [1;3])$.

Clase 7: distribuciones clasicas discretas

Ejercicio 1. Juan es mecánico y tiene muchos clientes. En promedio le traen 2,3 autos por día. ¿Cuál es la probabilidad de que le lleven más de 3 autos un día?

Ejercicio 2. Sea W una variable aleatoria con densidad:

$$f_W(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{2}{3} & 2 \leq x < c \\ \frac{1}{x^2} & c \leq x \end{cases}$$

a) Hallar c.

b) Calcular la función de distribución acumulada de W.

Ejercicio 3. Fausto llega a la terminal de colectivos entre las 8 y las 8:30 de la mañana. La variable aleatoria continua $X =$ "cantidad de minutos después de las 8 que pasan hasta que Fausto llega a la terminal" tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{225} & 0 \leq x < 15 \\ \frac{2}{15} - \frac{x}{225} & 15 \leq x < 30 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los colectivos que podría tomar Fausto son tres: el colectivo 1 que sale a las 8:09, el colectivo 2 que sale a las 8:18 y el colectivo 3 de las 8:31.

a) Hallar la función de probabilidad puntual de la variable aleatoria $Y =$ "número de colectivo que toma Fausto".

b) Decidir si son independientes los eventos $A = \{X < 15\}$ y $B = \{Y = 2\}$.

Clase 8: variables aleatorias continuas

Ejercicio 1. Un ómnibus recorre los 100km que separan A de B. Si se avería, la distancia entre el lugar en que se rompe y A es una variable aleatoria con distribución uniforme en (0,100). Hay tres talleres mecánicos: en A, B y en el punto medio de la ruta. Cuando un ómnibus se avería recurre al taller más cercano. Un empleado, afirma que si trasladan los talleres a 25, 50 y 75 km de A el recorrido del ómnibus averiado hasta el taller más cercano será la mayoría de las veces menor.

a) Buscar la función de densidad de las variables aleatorias

$$X = \text{"distancia recorrida por el ómnibus una vez roto con la situación actual"}$$

$$Y = \text{"distancia recorrida por el ómnibus una vez roto con la propuesta del empleado"}$$

b) ¿Es cierto lo que dice el empleado? ¿es buena su idea? Calcular $\mathbb{P}(Y < X)$ y decidir si $P(Y \leq a) \geq P(X \leq a)$ para todo a.

c) ¿Se les ocurre una idea mejor?

Ejercicio 2. Sea $Y \sim Exp(\lambda)$.

a) Hallar el valor de λ tal que $P(Y \leq 2) = 0,4$.

b) Hallar el valor de a que cumple $P(Y > a) = P(Y < a)$.

Ejercicio 3. Se lanza un dado, sea n el número obtenido. Luego se sortea X con distribución $Exp(n)$. Si el valor obtenido es menor a 10, se vuelve a lanzar el dado y a sortear X. Se repite esto hasta obtener un número mayor a 10.

a) Calcular $P(X > 20)$.

b) Si $X > 20$, ¿cuál es la probabilidad de que la última vez que tiramos el dado hayamos obtenido un 1?.

Clase 9: distribuciones clasicas continuas

Ejercicio 1. Sean X una variable aleatoria tal que $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ y $\lambda > 0$. Definimos las variables aleatorias $Y = 1 - X$, $W = -\frac{\ln(1-X)}{\lambda}$ y $R = \sqrt{-2\lambda \ln(1-X)}$.

a) Hallar la distribución de X e Y. ¿Son distribuciones conocidas? ¿Cuáles?

b) Demostrar que R tiene distribución de *Rayleigh* de parámetro λ con densidad

$$f(r) = \frac{r}{\lambda} \exp\left(-\frac{r^2}{2\lambda}\right) \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(r)$$

.

Ejercicio 2. (*Traslaciones*) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, probar que aX se distribuye Exponencial. ¿De qué parámetro?

b) Si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, probar que aX se distribuye Gamma. ¿De qué parámetros?

c) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, probar que $aX + b$ se distribuye Normal. ¿De qué parámetros?

Ejercicio 3. La medida, en centímetros, de la longitud de la cintura de los hombres en Buenos Aires sigue una distribución normal con $\mu = 75$ y $\sigma^2 = 25$. Se sabe que todos los hombres de menos de 70 centímetros de cintura usan cinturón talle 1, los de cintura entre 70 y 81 centímetros usan talle 2, y los restantes talle 3.

a) Hallar la distribución del talle de cinturón de los hombres de Buenos Aires.

b) ¿Cuál debería ser la longitud máxima de cintura del talle 1 si se quiere que el 30% de los hombres de Buenos Aires usen talle 1?

Ejercicio 4. En una tienda, un cliente acaba de comprar un cinturón de talle 2, ¿cuál es la probabilidad de que su cintura mida más de 75 centímetros?

Ejercicio 5. Si en una tienda entran hombres a comprar un cinturón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el cuarto cinturón vendido sea el primero de talle 1?

Ejercicio 6. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Calcular $\mathbb{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$.

Ejercicio 7. Sea $X \sim N(0,1)$. Hallar la función de densidad de $Z = X^2$. ¿Se trata de una densidad conocida? ¿Cuál? Deducir que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Ejercicio 8. La magnitud V de la velocidad de una molécula con masa m en un gas de temperatura absoluta T es una variable aleatoria que, de acuerdo a la teoría cinética de los gases, posee una distribución de Maxwell con parámetro $\alpha = \sqrt{2kT/m}$, donde k es la constante de Boltzmann. Su densidad es

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^3} v^2 \exp\left(-\left(\frac{v}{\alpha}\right)^2\right) \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(v)$$

¿Cuál es la distribución de la energía cinética $E = mV^2/2$ de una molécula?

Ejercicio 9. La *mediana* de una variable aleatoria continua X se define como el único número real m que cumple

$$\mathbb{P}(X \geq m) = \mathbb{P}(X < m) = \frac{1}{2}$$

Hallar la mediana de las siguientes variables: $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ y $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Clase 10: vectores aleatorios

Ejercicio 1. Romina tiene una moneda pesada con probabilidad p de que salga cara, y la tira tres veces. Definimos las variables aleatorias

$X =$ cantidad de caras que obtuvo

$Y =$ número de tiro en que obtuvo la última cara (si no obtuvo caras, 0)

a) Hallar el rango de X, el rango de Y, probar que el vector (X, Y) es discreto y calcular su rango.

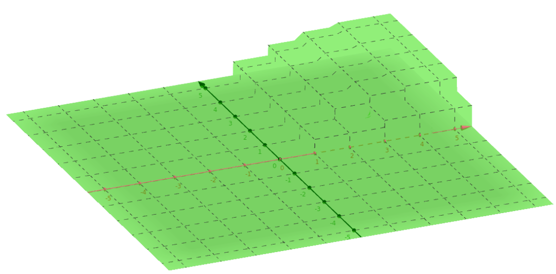
b) Calcular $p_{(X,Y)}$

Ejercicio 2. Una urna tiene cinco bolitas numeradas del 0 al 4. Se extraen dos bolitas de la urna, sin reposición. Definimos las variables aleatorias

- $X =$ diferencia entre los dos valores obtenidos
- $Y = \begin{cases} 1 & \text{si la suma es par} \\ 0 & \text{si la suma es impar} \end{cases}$

a) Hallar el rango de X, el rango de Y, probar que el vector (X, Y) es discreto y calcular su rango.

b) Calcular $p_{(X,Y)}$ y $F_{(X,Y)}$



Ejercicio 3. Verificar que la F hallada en el punto anterior cumple las propiedades:

- $\lim\limits_{\forall i, x_i \to +\infty} F(x_1, x_2) = 1.$
- $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$ para todo i.
- F es no-decreciente en cada variable.
- F es continua a derecha en cada variable.

¿Si F es una función cualquiera que cumple estas cuatro condiciones, es necesariamente una función de distribución acumulada de un vector aleatorio?

Ejercicio 4. Lucio juega al ajedrez. Cada día, juega reiteradas partidas hasta el momento en que pierde la primera; en ese momento descansa hasta el día siguiente. Supongamos que Lucio *gana* una partida con probabilidad p, *pierde* una partida con probabilidad q y hace *tablas* con probabilidad r, con $p + q + r = 1$; y suponemos que todas las partidas son independientes. Definimos las variables aleatorias

$$\begin{aligned} J &= \text{cantidad de partidas jugadas hoy} \\ G &= \text{cantidad de partidas ganadas hoy} \end{aligned}$$

a) Calcular $p_{(J,G)}$, la función de probabilidad puntual conjunta de J y G.

b) Calcular p_J y p_G.

c) Si $p = 0.45$, $q = 0.5$ y $r = 0.05$, calcular $\mathbb{P}(J = 10 \mid G = 5)$.

Sugerencia: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} t^n = \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}}$, *si* $0 \leq t < 1$.

Clase 11: vectores aleatorios

Ejercicio 1. Juan tiene dos monedas que estan magicamente conectadas entre si. Lanzamos ambas momendas simultaneamente. Se sabe que la probabilidad de obtener cara en cada una de ellas es un medio, pero no se sabe nada del comportamiento conjunto. Determinar que valores puede tener la probabilidad de sacar dos caras.

Ejercicio 2. En una tienda la cantidad de clientes que entra en un dia tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Cada cliente que entra compra algo con probabilidad p de forma independiente. ¿Cuál es la distribución de la cantidad de clientes que compra algo?

Ejercicio 3. Sean X, Y, Z variable aleatorias. Demostrar que

$$\min\{P(X > Y), P(Y > Z), P(Z > X)\} \leq 2/3.$$

Ejercicio 4. Sean X, Y variables aleatorias discretas con función de distribución conjunta

$$p_{ij} = \frac{C}{(i + j - 1)(i + j)(i + j + 1)},$$

para $i, j \in \mathbb{N}$. Calcule C. ¿Son X e Y independientes? Hallar la distribución de $S = X + Y$.

Ejercicio 5. Sean X, Y variables aleatorias independientes, ambas con distribución $\mathcal{G}(p)$. Demostrar que

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n - 1}$$

para $k = 1, \ldots, n - 1$

Ejercicio 6. Sean X_j para $1 \leq j \leq n$ variables aleatorias independientes con rango en $\mathbb{Z}$ tales que X_j y $-X_j$ tienen la misma distribución. Demuestre que para todo $m \in \mathbb{Z}$,

$$P(S_n \geq m) = P(S_n \leq -m)$$

con $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. ¿Es cierta en general la conclusión si no suponemos independencia?

Clase 12: vectores aleatorios continuos

Ejercicio 1. Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad dada por

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} kxe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

.

a) Calcular el valor de k.

b) Hallar f_X y f_Y. ¿Son X e Y independientes?

c) Calcular $\mathbb{P}(X = Y)$ y $\mathbb{P}(X < Y)$.

d) Calcular $\mathbb{P}((X,Y) \in [1,2] \times [2,4])$.

Ejercicio 2. Sea $f_{(X,Y)}(x,y) = e^{-3y}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y)\mathbf{1}_{(4,7)}(x)$ la densidad del vector (X,Y). ¿Son X e Y independientes? ¿Cuáles son sus distribuciones? Calcular $\mathbb{P}(X < 2Y)$

Ejercicio 3. El tiempo que tarda un atleta profesional promedio en correr 100mts viene dado por una v.a. $X \sim \mathit{Rayleigh}(5)$. En una carrera de 3 participantes, probar que el tiempo que tarda el ganador se distribuye Rayleigh, ¿de qué parámetro?
Recuerdo: Si $X \sim \mathit{Rayleigh}(\lambda)$ entonces $f_X(x) = \frac{x}{\lambda}\exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda}\right)\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$.

Ejercicio 4. Sean X_i, $i = 1, \ldots, n$, v.a.i.i.d. con densidad $f(x)$. Definimos las v.a. $U = \min_i\{X_i\}$ y $V = \max_i\{X_i\}$. Calcular $f_{(U,V)}$.
Para entregar:

Ejercicio 5. Sea $f_{(X,Y)}(x,y) = e^{-y}\mathbf{1}_{[0,y]}(x)\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y)$. ¿Son X e Y independientes? ¿Cuáles son sus distribuciones? Calcular $\mathbb{P}(2X > Y)$

Ejercicio 6. Sea (X,Y) un vector aleatorio, cuyas coordenadas se distribuyen $N(0,\sigma^2)$ y son independientes. Probar que la longitud del vector, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, se distribuye Rayleigh de parámetro σ^2.

Clase 13: vectores aleatorios continuos, cambio de variables

Ejercicio 1. Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1 + x^3y - y^3x}{4} 1_{[-1,1]}(x) 1_{[-1,1]}(y).$$

Probar que X e Y son uniformes. ¿Son independientes? Calcular $P(X < Y^2)$.

Ejercicio 2. Sean X, Y v.a.i.i.d. con distribución $\mathcal{U}[0,1]$. Calcular la densidad de $Z = XY$.

Ejercicio 3. Sea (X,Y) un vector aleatorio continuo con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } -1 < x < 1, 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Probar que $\frac{Y}{X^2}$ tiene distribución $\mathcal{U}[0,1]$ y es independiente de X.

Ejercicio 4. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a.i.i.d. con distribución $\mathcal{E}(1)$. Hallar la distribución de

$$Y = \max\left\{k \in \mathbb{N} : \sum_{n=1}^{k} X_n < 1\right\}.$$

Clase 14 y 15: esperanza y varianza

Ejercicio 1. Sea $X \sim Ge(p)$, calcular $\mathbb{E}[X]$ y $Var[X]$.

Ejercicio 2. Sea $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, calcular $\mathbb{E}[X]$ y $Var[X]$.

Ejercicio 3. Sean $X, Y \sim \mathcal{U}(0,1)$ independientes. Sea $Z = XY$. Calcular $\mathbb{E}[Z]$ y $Var[Z]$.

Ejercicio 4. A una fiesta asisten n personas. Al entrar todos dejan sus sombreros en un perchero. Al retirarse toman un sombrero al azar. Sea X=“cantidad de personas que se llevan su sombrero original”. Calcular $\mathbb{E}[X]$ y $Var[X]$.

Ejercicio 5. Se arroja n veces una moneda sesgada. La probabilidad de que salga cara en un tiro es p. Se define una racha como una sucesión de tiros con igual resultado (cara: c, ceca: s). Por ejemplo, la sucesión

$$ccccssccccscc$$

contiene 5 rachas. Hallar la esperanza y varianza del número de rachas en n tiros.

Ejercicio 6. En un juego televisivo a un participante se le ofrece $\$X_1$. Puede llevarse el premio y retirarse, o rechazarlo y escuchar la siguiente oferta $\$X_2$. Se le van a hacer a lo sumo N ofertas. Supongamos que $(X_i)_{i=1,\dots,N}$ son independientes con distribución $\mathcal{U}[0,M]$. ¿Cuál es la estrategia que maximiza la esperanza de su ganancia?¿Cuál es la esperanza para su ganancia?

Clase 16: esperanza condicional

Ejercicio 1. Una gallina pone una cantidad N de huevos, donde $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. De cada huevo nace un pollito con probabilidad p. Sea K la variable aleatoria "cantidad de pollitos que nacieron de los huevos puestos por la gallina".

a) Calcular $p_{K|N=n}(k)$ y $p_K(k)$.

b) Calcular $\mathbb{E}(K|N)$.

c) Calcular $\mathbb{E}(K)$.

d) Calcular $\mathbb{E}(N|K)$.

Ejercicio 2. Problema del minero. Un minero está en una mina y tiene tres túneles para elegir:

- El túnel 1 lo lleva a la salida en 1 hora.
- El túnel 2 lo devuelve al mismo lugar en 2 horas.
- El túnel 3 lo devuelve al mismo lugar en 3 horas.

Hallar $\mathbb{E}(T)$, donde T es el tiempo que tarda el minero en salir de la mina.

Ejercicio 3. Sea (X, Y) un vector continuo con densidad dada por

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}(0 \leq x \leq y).$$

Calcular $\mathbb{E}(X|Y)$.

Ejercicio 4. Se tira una moneda repetidamente con probabilidad p de que salga cara. Sea X_n la cantidad de tiros necesaria para obtener una racha de n caras consecutivas. Calcular $\mathbb{E}(X_n)$.

Ejercicio 5. Sea (X, Y) un vector continuo con densidad dada por

$$f(x, y) = x(y - x)e^{-y} \mathbf{1}(0 \leq x \leq y).$$

Calcular $\mathbb{E}(X|Y)$ y $\mathbb{E}(Y|X)$.

Clase 17 y 18: esperanza condicional

Ejercicio 1. Sean X e Y variables aleatorias acotadas y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada. Probar que $\mathbb{E}[Y g(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X] g(X)]$.

Ejercicio 2. Sea $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Se lanza una moneda, con probabildiad U sale cara. Sea $X = 1_{\{\text{salió cara}\}}$. Calcular:

a) $\mathbb{E}[X|U]$

b) p_X

c) $f_{U|X=1}$

d) $\mathbb{E}[U|X]$

Ejercicio 3. Sea N tal que $\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(N = 2) = \frac{1}{2}$. Y sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0, N]$. Hallar $\mathbb{E}[X|N]$ y $\mathbb{E}[N|X]$.

Ejercicio 4. Sea $\mu \in \mathbb{R}^2$ y $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simetrica definida positiva. Consideramos $Z = (X, Y)$ con distribución normal multivariada de parametros μ y Σ, es decir

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^t\Sigma(z-\mu)}{2}\right).$$

Calcular $\mathbb{E}[Y|X]$.

Ejercicio 5. Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una suceción de variables aleatorias uniformes en $[0, 1]$. Definimos

$$N = \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\right\}.$$

Calcular $E[N]$.

Clase 19: desigualdad de tchebychev y convergencias

Ejercicio 1. Una fábrica produce cajas de chocolates. Cada caja contiene un chocolate blanco y uno negro. El peso (en gramos) de un chocolate negro, uno blanco y una caja vacía son variables aleatorias independientes con esperanza 50, 40 y 10, y varianza 0.15, 0.1 y 0.05, respectivamente.

a) Hallar una cota inferior para la probabilidad de que una caja de chocolates pese entre 98.5 y 101.5 gramos.

b) Hallar una cota inferior para la probabilidad de que el promedio de 10 cajas de chocolates esté entre 98.5 y 101.5 gramos.

c) Hallar $n \in \mathbb{N}$ para que la probabilidad de que el promedio de n cajas de chocolates esté entre 98.5 y 101.5 gramos sea al menos 0.9999.

Ejercicio 2. Sean X una variable aleatoria e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $Y_n \sim \exp(n)$, todas definidas en $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $X_n = X + Y_n$. Probar que $X_n \xrightarrow{p} X$.

Ejercicio 3. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias definidas en $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Probar que existe una sucesión de números reales positivos b_n tal que $\frac{X_n}{b_n} \xrightarrow{cs} 0$.

Ejercicio 4. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias iid definidas en $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ con densidad $f(x) = \frac{2x}{\sigma^2}\mathbf{1}_{[0,\sigma]}(x)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $Y_n = \max_{1\le i\le n}\{X_i\}$, probar que existe Y tal que $Y_n \xrightarrow{cs} Y$.

Clase 20 y 21: Convergencias y Ley de los grandes números

Ejercicio 1. Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $X_n \xrightarrow{cs} X$. ¿Vale la vuelta?

Ejercicio 2. Decidir si

a) Sea A_n una sucesión de eventos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, entonces $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

b) Sean X_n variables aleatorias tal que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$ para cierta constante $c \in \mathbb{R}$, entonces $X_n \xrightarrow{P} c$.

c) Sean X_n, Y_n, X, Y variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad tal que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ y $Y_n \xrightarrow{cs} Y$, entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + Y$.

Ejercicio 3. Sea $([0,1], \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad con $\mathbb{P}([a,b]) = b - a$ para $0 \leq a \leq b \leq 1$. Dado $n \in \mathbb{N}$ tomamos $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $2^k \leq n < 2^{k+1}$ y definimos

$$X_n = 1_{\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]}.$$

¿Son estas variables independientes?¿Convergen en probabilidad? ¿Convergen casi seguro?

Ejercicio 4. Dado $\alpha > 0$ sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes cada una con distribución Bernoulli de parámetro $n^{-\alpha}$, respectivamente.

a) Probar que $X_n \xrightarrow{P} 0$.

b) Estudiar para los distintos valores de $\alpha > 0$ la existencia de límite casi seguro de la sucesión. En caso de existir tal límite, explicitarlo.

c) Calcular $\mathbb{P}(L^+ = 1)$ para los distintos valores de $\alpha > 0$, donde $L^+ := \limsup_{n\to\infty} X_n$.

d) Probar que $P(L^- = 0) = 1$ para todo $\alpha > 0$, donde $L^- := \liminf_{n\to\infty} X_n$.

Ejercicio 5. Sean $U_i \sim \mathcal{U}[0,1]$ independientes. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que

$$\frac{f(U_1) + \cdots + f(U_n)}{n} \xrightarrow{cs} \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Ejercicio 6. Sea X_n, X tal que $X_n \xrightarrow{cs} X$ y existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|X_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.

Ejercicio 7. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdot + x_n}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Ejercicio 8. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua.

a) Sea $0 \leq p \leq 1$ y X_n una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución de Be(p). Definimos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Probar que $\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})] \to f(p)$.

b) Definimos

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f(\frac{i}{n}).$$

Probar que f_n converge puntualmente a f.

Clase 22: Teorema central del límite

Ejercicio 1. Un grillo pasea sobre la recta numérica pegando saltos sobre los números enteros. Cada salto lo da hacia la izquierda o la derecha con igual probabilidad. Como hay viento oeste, cada salto hacia la derecha es de 2 unidades y cada salto hacia la izquierda es de 1 unidad. Supongamos que el grillo comienza parado en el 0.

a) Estimar la probabilidad de que luego de 100 saltos el grillo esté parado en $[47, 53]$.

b) Estimar la probabilidad de que luego de 100 saltos el grillo esté parado en el 50.

c) Mejorar la estimación de a).

Ejercicio 2. Paula afirma que obtuvo un promedio de 3.25 puntos en 1000 lanzamientos de un dado equilibrado. ¿Es esta afirmación creíble?

Ejercicio 3. Dado $\lambda > 0$, sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con densidad $f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$.
Definimos

$$Y_n = n^{\alpha}\frac{n - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^3}$$

Si $\alpha = \frac{5}{2}$, probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \lambda^6)$. ¿Qué ocurre en el resto de los casos?

Ejercicio 4. Dado $\lambda > 0$, sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$. Definimos

$$Y_n = \#\{i \in \{1, ..., n\}/X_i > \frac{1}{\lambda}\}$$

a) Hallar sucesiones positivas y divergentes de números reales a_n y b_n tales que exista el límite no trivial en distribución de $\dfrac{Y_n - a_n}{b_n}$.

b) Hallar sucesiones positivas y divergentes de números reales c_n y d_n tales que exista el límite no trivial en distribución de $\dfrac{Y_n^2 - c_n}{d_n}$.

Clase 23: Proceso de Bernoulli y Poisson

Ejercicio 1. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso de Bernoulli de parametro $\frac{1}{2}$. Sean

$$T = \min\{n \geq 2 : X_n = 1 \text{ y } X_{n-1} = 1\} \quad \text{y} \quad \tilde{T} = \min\{n \geq 2 : X_n = 1 \text{ y } X_{n-1} = 0\}.$$

Calcular $\mathbb{E}[T]$ y $\mathbb{E}[\tilde{T}]$.

Ejercicio 2. En una ventanilla se venden entradas para un concierto. Los tiempos de llegada de los hombres y las mujeres corresponden a procesos de Poisson independientes con tasas 30 y 20 clientes por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los primeros tres clientes sean mujeres?

b) Si exactamente dos clientes llegan antes de los primeros 5 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros tres minutos?

Ejercicio 3. Una linea de colectivos tiene dos inspectores. Ambos intentan verificar la frecuencia de la línea. Ana va a la parada y le pregunta al quiosquero cuando paso el último colectivo, luego espera a que venga otro y anota la duración del período entre que pasaron ambos colectivos. Beto va a la parada espera que pase un colectivo, y luego espera a que pase otro más, anota la duración del período entre que pasaron ambos colectivos. Ambos realizan su tarea muchas veces y toman promedio. Después de hacer varias inspeccciones comparan sus resultados y estos son bastante diferentes. ¿A qué se debe esto?

Clase 24: Cadenas de Markov

Ejercicio 1. Gonza juega todos los días al tenis o al ajedrez. Si un día juega al ajedrez al siguiente juega al tenis. Si un día juega al tenis con probabilidad un medio al siguiente juega al tenis y con probabilidad un medio al siguiente juega al ajedrez.

a) Si hoy (lunes) jugó al ajedrez, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al ajedrez el jueves?

b) Estimar el número de días que jugará al ajedrez el año que viene.

Ejercicio 2. Una persona tiene dos paraguas, pueden estar en su oficina o su casa. Si al salir de su casa a la mañana, o del trabajo a la noche, está lloviendo y en el lugar en el que está hay un paraguas disponible, se lo lleva. Si no hay, se moja. Supongamos que, independientemente del pasado, la probabilidad de que llueva en cada viaje es p, con $0 < p < 1$. ¿Cuál es la fracción del tiempo que la persona se moja (asintoticamente)?

Clase 25: Estadística

Ejercicio 1. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria con distribución

a) $\mathcal{P}(\lambda)$

b) dada por la densidad $f_X(x, \lambda) = \dfrac{3\lambda^3}{x^4}\mathbf{1}_{[\lambda,+\infty)}(x)$

- Encontrar los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud de λ basados en tal muestra.

- Decidir si los estimadores encontrados son insesgados, asintóticamente insesgados, consistentes y/o fuertemente consistentes.

Ejercicio 2. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

a) Hallar los estimadores de momentos para (α, λ).

b) Analizar los estimadores de máxima verosimilitud de (α, λ), α conociendo λ y de λ conociendo α. Cuando sea posible, calcularlos y estudiar qué propiedades tienen.