Segundo Parcial 4/7/19

1	2	3	4	5	Calificación

Nombre y Apellido: Número de libreta:

Ejercicio 1. Andrey colecciona figuritas de un álbum compuesto por N figuritas distintas. Consigue sus figuritas comprando una por día. Cada vez que adquiere una, ésta tiene igual probabilidad de ser cualquiera de las N que componen el álbum. Sea X el número de figuritas distintas que tiene después de comprar k figuritas. Hallar $\mathbb{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

Ejercicio 2. Sea $U \sim \mathcal{U}(0,6)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos las variables aleatorias X_n tales que $X_n|_{U=u} \sim N\left(\frac{u^2}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $\mathbb{E}(X_n)$ y $\mathrm{Var}(X_n)$.
Sugerencia: use que $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\big[\mathbb{E}(X|Y)\big] + \mathbb{E}\big[\mathrm{Var}(X|Y)\big]$ y no haga demasiadas cuentas.

(b) Probar que $X_n \xrightarrow{p} 0$.

(c) Hallar $n \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\mathbb{P}\left(\frac{12-\sqrt{n}}{n} < X_n < \frac{12+\sqrt{n}}{n}\right) \geq 0.99$$

Ejercicio 3. Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $U_n \sim \mathcal{U}[0,1]$. Definimos $X_n = n^{-U_n}$.

(a) Probar que $X_n \xrightarrow{p} 0$.

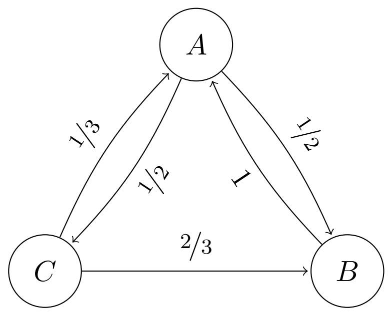
(b) Probar que $\mathbb{P}(\liminf_n X_n = 0) = 1$.

(c) Probar que $\mathbb{P}(\limsup_n X_n = 1) = 1$.

(d) Concluir que X_n no converge casi seguro.

Ejercicio 4.

(a) Para la siguiente cadena explicitar la matriz asociada Q y hallar la distribución estacionaria π.



(b) Definimos $N_B = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = B\}$. Hallar $\mathbb{E}[N_B|X_0 = B]$.

Sugerencia: considere $\mathbb{E}[N_B|X_0 = A]$ y $\mathbb{E}[N_B|X_0 = C]$, o calcule $\mathbb{P}(N_B = k|X_0 = B)$.

Observación: notar que $\mathbb{E}[N_B|X_0 = B] = \frac{1}{\pi_B}$. Esto vale en general, la idea no es que usen este resultado si no que lo verifiquen en este caso particular.

Ejercicio 5. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbf{1}_{[\theta,+\infty)}(x)$$

(a) Encontrar el estimador de máxima verosimilitud $\overline{\theta}$ de θ basado en tal muestra.

(b) Probar que el EMV hallado es fuertemente consistente, es decir $\overline{\theta} \xrightarrow{cs} \theta$