Resolución del Primer Parcial 9/5/19

Ejercicio 1. Franco tiene diez cartas, numeradas del 1 al 10, las mezcla y elige una carta k al azar. Luego, tira k veces un dado. Si obtiene algún tres, Franco gana el juego y si no, pierde.

(a) Si Franco ganó el juego, ¿cuál es la probabilidad de que haya sacado la carta 2?

(b) Si Franco juega a este juego una vez por día durante una semana, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos tres veces?

(c) Si Franco juega a este juego una vez por día comenzando hoy, calcular la probabilidad de que gane por primera vez el 13/5/19.

Solución. (a) Queremos calcular $\mathbb{P}(k=2|\text{Franco ganó})$. Por Bayes,

$$\mathbb{P}(k=2|\text{Franco ganó}) = \frac{\mathbb{P}(\text{Franco ganó}|k=2)\mathbb{P}(k=2)}{\mathbb{P}(\text{Franco ganó})}.$$

Es claro que $\mathbb{P}(k=2)=\frac{1}{10}$, calculemos $\mathbb{P}(\text{Franco ganó}|k=2)$. Esto es la probabildiad de obtener algún 3 al lanzar el dado dos veces. Es más facil calcular su complemento, la probabilidad de que no salga ningún 3, que da $\left(\frac{5}{6}\right)^2$. Nos queda

$$\mathbb{P}(\text{Franco ganó}|k=2) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}.$$

Para calcular la probabilidad de que gane Franco basta utilizar la formula de probabildiad total condicionando con respecto a que número de carta salió y repitiendo el razonamiento hecho para calcular la probabilidad de que salga algún tres. Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Franco ganó}) &= \sum_{i=1}^{10}\mathbb{P}(\text{Franco ganó}|k=i)\mathbb{P}(k=i)\\
&= \sum_{i=1}^{10}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^i\right)\frac{1}{10}\\
&= 1-\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^i\\
&= 1-\frac{1}{10}\frac{5}{6}\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}}{1-\frac{5}{6}}\\
&= 1-\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{10}.
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(k=2|\text{Franco ganó}) &= \frac{\frac{11}{36}\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{10}}\\
&= \frac{11}{180\left(1+\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right)}.
\end{aligned}$$

(b) Definimos

$$p = \mathbb{P}(\text{Franco ganó}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{10}.$$

Si X es la cantidad de veces que ganó, $X \sim Bi(7, p)$. Queremos calcular $\mathbb{P}(X \geq 3)$. Para hacer esto vamos a calcular el complemento, $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 0, 1 \text{ o } 2)$. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Franco ganó al menos 3 veces}) = \mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(X = i) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{7}{i} p^i (1-p)^{7-i}.\end{aligned}$$

(c) Para ganar por primera vez el 13/5/19 debe haber perdido en los primeros 4 intentos y haber ganado en el quinto, esto es

$$\mathbb{P}(\text{gane por primera vez el } 13/5/19) = p(1-p)^4.$$

Ejercicio 2. Ana y Beto se enfrentan en un juego que se desarrolla en múltiples rondas. El ganador de cada ronda se lleva un punto, Ana lo hace con probabilidad p $(0 < p < 1)$ y Beto con probabilidad $1 - p$. El primero que le saque dos puntos de diferencia al adversario es declarado ganador del juego.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el juego termine?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que gane Ana?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el juego dure más de 7 rondas?

(d) Que gane Ana, ¿es independiente de que el juego dure más de 7 rondas?

Solución. (a) Cuando uno de los jugadores logre sacarle dos puntos de diferencia a su adversario se tienen que haber jugado una cantidad par total de rondas. Esto es así pues si uno de los jugadores ganó X rondas y el otro $X+2$ para algún X, en total se jugaron $X + X + 2 = 2(X+1)$ rondas, que es un número par.

Sea A_{2k} el evento "Ana ganó en la $2k$-esima ronda". Para que esto ocurra en los dos primeros partidos tuvo que haber ganado una vez Ana y una Beto (en algún orden), esto ocurre con probabildiad $2p(1-p)$. Lo mismo ocurre con la tercer y cuarta ronda, quinta y sexta, etc. Esto se repite $k-1$ veces, hasta que en las rondas $2k-1$ y $2k$ debe ganar Ana. Obtenemos

$$\mathbb{P}(A_{2k}) = (2p(1-p))^{k-1} p^2$$

Analogamente definimos B_{2k} y tenemos

$$\mathbb{P}(B_{2k}) = (2p(1-p))^{k-1} (1-p)^2$$

Finalmente tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{el juego termine}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2k}) + \mathbb{P}(B_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (2p(1-p))^{k-1} p^2 + (2p(1-p))^{k-1} (1-p)^2 \\ &= (p^2 + (1-p)^2) \sum_{k=1}^{\infty} (2p(1-p))^{k-1} \\ &= \frac{p^2 + (1-p)^2}{1 - 2p(1-p)} = 1\end{aligned}$$

(b) Con el mismos razonamiento que antes, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{gane Ana}) &= \sum_{k=1}^{\infty}(2p(1-p))^{k-1}p^2 \\
&= p^2\sum_{k=1}^{\infty}(2p(1-p))^{k-1} \\
&= \frac{p^2}{1-2p(1-p)} = \frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}
\end{aligned}$$

(c) Repetimos el razonamiento que hicimos antes. Para que el juego dure más de 7 rondas, al cabo de los dos primeros partidos deben tener un punto cada uno. Esto ocurre con probabilidad $2p(1-p)$. Lo mismo debe ocurrir en el tercer y cuarto encuentro, así como en el quito y sexto. Obtenemos que

$$\mathbb{P}(\text{el juego duró más de 7 rondas}) = (2p(1-p))^3.$$

(d) Observemos que $\mathbb{P}(\text{el juego duró más de 7 rondas}) \neq 0$ y consideremos la probabildiad de que gane Ana condicionado a que el juego duró más de 7 rondas. Que el juego dure más de 7 rondas es equivalente a decir que al cabo del sexto partido estaban 3 a 3. A partir de este punto la probabilidad de ganar para Ana es igual a la que tenia al comenzar el partido, es decir

$$\mathbb{P}(\text{gane Ana} \mid \text{el juego duró más de 7 rondas}) = \mathbb{P}(\text{gane Ana}).$$

Esto nos dice que los eventos son independientes.

Observación: otra manera de resolver el ejercicio es la siguiente. Para que gane Ana al cabo de dos partidos o debe haber ganado o deben estar 1 a 1. En caso de estar empatados la probabilidad de ganar de Ana es la misma que al comenzar el juego, tenemos

$$\mathbb{P}(\text{gane Ana}) = p^2 + 2p(1-p)\mathbb{P}(\text{gane Ana})$$

de donde podemos despejar $\mathbb{P}(\text{gane Ana})$.

Ejercicio 3. De una urna con 3 bolitas negras y 2 bolitas blancas se extraen, sin reposición, dos bolitas. Sean Y la cantidad de bolitas negras extraídas y $X \sim N(12, 5^2)$ independiente de Y.
Calcular $\mathbb{P}(X^Y \leq 25)$.

Solución. Condicionemos respecto a los posibles valores que puede tomar Y, nos queda

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X^Y \leq 25) &= \mathbb{P}(X^Y \leq 25|Y=0)P(Y=0) + \mathbb{P}(X^Y \leq 25|Y=1)P(Y=1) + \mathbb{P}(X^Y \leq 25|Y=2)P(Y=2) \\
&= \mathbb{P}(X^0 \leq 25)P(Y=0) + \mathbb{P}(X \leq 25)P(Y=1) + \mathbb{P}(X^2 \leq 25)P(Y=2)
\end{aligned}$$

Por un lado es facíl ver que

$$P(Y=0) = \frac{1}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}, \quad P(Y=1) = \frac{3\times 2}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad P(Y=2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}.$$

y que $\mathbb{P}(X^0 \leq 25) = 1$.
Para calcular $\mathbb{P}(X \leq 25)$ normalizamos y usamos la tabla, tenemos

$$\mathbb{P}(X \leq 25) = \mathbb{P}\left(\frac{X-12}{5} \leq \frac{25-12}{5}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{13}{5}\right) = 1 - \mathbb{P}(Z > 2.6) = 1 - 0.0047 = 0.9953$$

donde Z tiene distribución normal estándar.

Para calcular $\mathbb{P}(X^2 \leq 25)$ vamos a reescribir la desigualdad en terminos de X y normalizar como antes. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^2 \leq 25) &= \mathbb{P}(|X| \leq 5) = \mathbb{P}(-5 \leq X \leq 5) = \mathbb{P}\left(\frac{-5-12}{5} \leq \frac{X-12}{5} \leq \frac{5-12}{5}\right) \\ &= \mathbb{P}(-3.4 \leq Z \leq -1.4) = \mathbb{P}(Z \geq 1.4) - \mathbb{P}(Z \geq 3.4) = 0.0808 - 0.0003 = 0.0805\end{aligned}$$

Entonces, finalmente nos queda

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^Y \leq 25) &= \mathbb{P}(X^0 \leq 25)P(Y=0) + \mathbb{P}(X \leq 25)P(Y=1) + \mathbb{P}(X^2 \leq 25)P(Y=2) \\ &= 1\frac{1}{10} + 0.9953\frac{3}{5} + 0.0805\frac{3}{10} = 0.72133\end{aligned}$$

Ejercicio 4. En un torneo de ingenio compiten cinco personas y la competencia consiste en resolver un problema. El torneo termina cuando alguien resuelve el problema y esa persona es la ganadora. El tiempo que tarda cada participante en resolver el problema son variables aleatorias T_i, $i = 1, \ldots, 5$, independientes e idénticamente distribuidas tales que $T_i \sim \frac{Y}{X}$, con $X \sim \mathcal{U}[2,4]$ e $Y \sim \mathcal{E}(0.5)$ independientes.
Calcular la función de distribución acumulada de $D =$ "duración del torneo", verificar que F_D es continua y que $\lim_{t\to+\infty} F_D(t) = 1$.

Solución. Calculemos la distribución de $\frac{Y}{X}$. Para $t < 0$ tenemos $F_{\frac{Y}{X}}(t) = 0$, para $t \geq 0$ nos queda

$$\begin{aligned}F_{\frac{Y}{X}}(t) &= \int_2^4 \int_0^{xt} \frac{1}{2} 0.5 e^{-0.5y}\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_2^4 -e^{-0.5y}\Big|_0^{xt} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_2^4 1 - e^{-0.5xt}\, dx \\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{e^{-0.5xt}}{0.5t}\Big|_2^4 \\ &= 1 + \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t}.\end{aligned}$$

Luego para D tenemos $F_D(t) = 0$ si $t \leq 0$ y para $t > 0$ nos queda

$$\begin{aligned}F_D(t) &= \mathbb{P}\left(\min_{i=1,2,3,4,5} T_i \leq t\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\min_{i=1,2,3,4,5} T_i > t\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{5} \mathbb{P}(T_i > t) = 1 - \left(1 - F_{\frac{Y}{X}}(t)\right)^5 = 1 - \left(\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\right)^5.\end{aligned}$$

Es claro que es continua para $t \neq 0$, resta verificarlo en el 0. Tenemos

$$\lim_{t\to 0^+} 1 - \left(\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\right)^5 = 1 - \left(\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\right)^5 = 1 - \left(\lim_{t\to\infty} -e^{-t} + 2e^{-2t}\right)^5 = 1 - (-1+2) = 0$$

donde hemos usado la regla de L'Hôpital. Por izquierda la función es constantemente 0 por lo que el límite tambien es 0, la función es continua. Por otro lado

$$\lim_{t\to\infty} 1 - \left(\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\right)^5 = 1$$

ya que $\lim_{t\to\infty} e^{-t} - e^{-2t} = 0$.

Ejercicio 5. Sean $\lambda > 0$ y X e Y variables aleatorias independientes, ambas con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$.

(a) Hallar la distribución de $U = \frac{X}{X+Y}$. ¿Son U y $X+Y$ independientes?

(b) Calcular $\mathbb{P}(U < X + Y \mid U > \frac{1}{2})$.

Solución. Consideremos
$$T(X,Y) = \left(\frac{X}{X+Y}, X+Y\right) = (U,V).$$
Luego,
$$T^{-1}(U,V) = (UV, V - UV).$$
Tenemos
$$JT^{-1}(U,V) = \begin{vmatrix} V & U \\ -V & 1-U \end{vmatrix} = |V - UV + UV| = |V| = V.$$
Donde hemos usado que $V > 0$. Recordemos que
$$f_{(X,Y)}(x,y) = 1_{(0,+\infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,+\infty)}(y)\lambda e^{-\lambda y}.$$
Empleando el teorema de cambio de variable tenemos
$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= 1_{(0,+\infty)}(uv)\lambda e^{-\lambda uv} 1_{(0,+\infty)}(v-uv)\lambda e^{-\lambda(v-uv)} v \\ &= 1_{(0,+\infty)}(uv)\lambda^2 1_{(0,+\infty)}(v-uv) e^{-\lambda v} v \end{aligned}$$
Además $uv > 0$ y $v > uv$, por lo tanto $v > 0$ y como $uv > 0$, tambien tenemos $u > 0$. Como $v > 0$ y $v > uv$, obtenemos $1 > u$. Entonces $1 > u > 0$ y $v > 0$, y estas desigualdades implican las originales por lo que son equivalentes. Nos queda
$$f_{(U,V)}(u,v) = 1_{(0,1)}(u)\lambda^2 1_{(0,+\infty)}(v) e^{-\lambda v} v$$
Como esta función se factoriza como producto de una función de u y una de v, concluimos que U y V son independientes y podemos conocer sus funciones de densidad. Tenemos que U es uniforme $(0,1)$ e independiente de V, es decir
$$\frac{X}{X+Y} \sim \mathcal{U}(0,1)$$
y es independiente de $X+Y$.
Finalmente debemos calcular
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(U < X + Y \middle| U > \frac{1}{2}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(U < X+Y, U > \frac{1}{2}\right)}{\mathbb{P}(U > \frac{1}{2})} \\ &= 2\mathbb{P}\left(U < V, U > \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{u}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda v} v \, dv \, du \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} -e^{-\lambda v}(\lambda v + 1)\Big|_{u}^{+\infty} du \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-\lambda u}(\lambda u + 1)\, du \\ &= -\frac{2}{\lambda} e^{-\lambda u}(\lambda u + 2)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= -\frac{2}{\lambda} e^{-\lambda}(\lambda + 2) + \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda/2}(\lambda/2 + 2) \\ &= e^{-\lambda/2}\left(1 + \frac{4}{\lambda}\right) - e^{-\lambda}\left(2 + \frac{4}{\lambda}\right) \end{aligned}$$