PROBABILIDADES

Trabajo Práctico 6

1. a) Demostrar que la función

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x-y} & \text{si } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

no es función de distribución de un vector aleatorio.

b) Demostrar que la función

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) & \text{si } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

si lo es.

2. De una urna que contiene 3 bolillas numeradas 1, 2 y 3, se extraen sin reposición y sucesivamente 2 bolillas. Sea X el número de la primer bolilla e Y el de la segunda.

a) Hallar p_{XY} , p_X , p_Y y F_{XY} .

b) Calcular $P(X < Y)$.

c) ¿Son X e Y independientes?.

3. Se elige en forma aleatoria un par (X, Y) en el círculo de centro $(0, 0)$ y radio R (la probabilidad de que el par (X, Y) pertenezca a una subregión es proporcional al área de ésta).

a) Hallar la densidad conjunta del par (X, Y) .

b) Hallar la probabilidad de que la distancia del punto al centro del círculo sea menor que $R/2$.

c) Hallar las funciones de densidad marginal f_X y f_Y .

d) ¿Son X e Y independientes?.

4. Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo X el número de caras. Si $X = a$ se extraen sin reposición $a + 1$ bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y una roja. Sea Y el número de bolillas rojas extraídas.

a) Hallar la distribución de Y dado $X = a$ para $a = 0, 1, 2, 3$.

b) Obtener una tabla con la distribución conjunta del par (X, Y) . ¿Son X e Y independientes?.

c) Hallar la función de probabilidad marginal p_Y .

d) Si no se extrajo ninguna bolilla roja, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras?

5. Sea X una v.a. con distribución $U(0,1)$. Si $X = x$, se elige un número Y entre 0 y x, o sea que $Y/X = x \sim U(0,x)$.

a) Hallar la densidad conjunta del par (X,Y).

b) Hallar la densidad marginal f_Y.

6. Sea (X,Y) un v.a. con distribución uniforme en el trapecio de vértices $(-6,0), (-3,4)$, $(3,4)$ y $(6,0)$.

a) Hallar la densidad conjunta del par (X,Y) y las funciones de densidad marginal f_X y f_Y.

b) ¿Son X e Y independientes?. Justificar.

7. Sean X e Y v.a. independientes. Probar que si:

a) $X \sim Bi(n,p)$, $Y \sim Bi(m,p)$, entonces $X+Y \sim Bi(n+m,p)$.

b) $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$, entonces $X+Y \sim P(\lambda+\mu)$.

c) $X \sim G(p)$, $Y \sim G(p)$, entonces $X+Y \sim BN(2,p)$.

8. a) Sean X e Y v.a. independientes tales que $X \sim Bi(n,p)$ e $Y \sim Bi(m,p)$, probar que la distribución de X condicional a $X+Y=k$ es hipergeométrica, y especificar cuáles son sus parámetros.

b) Sean X e Y v.a. independientes tales que $X \sim P(\lambda)$ e $Y \sim P(\mu)$, probar que la distribución de X condicional a $X+Y=k$ es binomial, y especificar cuáles son sus parámetros.

c) Sea X una v.a. con distribución $P(\lambda)$ y sea Y una v.a. cuya distribución condicional a $X=k$ tiene distribución $Bi(k,p)$. Probar que la distribución de Y es $P(\lambda p)$.

9. Un laboratorio posee 14 ratas de la especie **A** y 16 de la especie **B** para realizar experimentación. La probabilidad de que cualquiera de ellas muera en un experimento es 0.1 y se considera que las muertes se producen en forma independiente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que mueran más de 4 ratas?.

b) Si murieron 2 ratas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas hayan sido de la especie **A**?.

10. El número de reclamos por errores en la facturación que recibe diariamente una oficina de una empresa de telefonía celular es una v.a. con distribución P(5), mientras que el número de reclamos de otro tipo es una v.a. con distribución P(15). Suponiendo independencia entre ambos tipos de reclamos,

a) hallar la probabilidad de que en una día dado haya por lo menos 23 reclamos.

b) si un día dado hubo 18 reclamos, ¿cuál es la probabilidad de que 8 de ellos hayan sido por errores en la facturación?.

11. El 5% de una población fuma cigarrillos negros, el 35% fuma cigarrillos rubios y el resto no fuma. Se realiza una encuesta a 35 personas y se definen: $Y_1 =$ número de personas que no fuman, $Y_2 =$ número de personas que fuman cigarrillos rubios e $Y_3 =$ número de personas que fuman cigarrillos negros.

a) Hallar la distribución de (Y_1, Y_2, Y_3).

b) Hallar la distribución de $(Y_1, Y_2 + Y_3)$.

c) Hallar la distribución de $(Y_2 + Y_3)$.

12. La longitud (en cm) de ciertas varillas de metal tiene distribución $N(5, 0.25)$. Para hacer un control de calidad se eligen 40 varillas al azar de la producción total. Hallar la probabilidad de que:

9 varillas midan menos de 4 cm

7 varillas midan entre 4 y 4.8 cm

12 varillas midan entre 4.8 y 5.5 cm

12 varillas midan más de 5.5 cm

13. Sean X e Y v.a. independientes con distribución exponencial de parámetro λ. Probar que $X + Y$ y $\frac{X}{Y}$ son independientes.

14. Sea (X, Y) un v.a. con densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\,x^2} & \text{si } |x| < 1, \quad 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar f_X y f_Y.

b) ¿Son X e Y independientes?. Justificar.

c) Probar que $U = \frac{Y}{X^2}$ tiene distribución $U(0, 1)$.

15. a) Sean $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ v.a. independientes. Probar que si $U = X + Y$ y $V = \frac{X}{X+Y}$, entonces $U \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$ y $V \sim \beta(\alpha, \beta)$.

b) Deducir que si $U_1 \sim \chi^2(p)$, $U_2 \sim \chi^2(q)$ son v.a. independientes, entonces

$$\frac{U_1}{U_1 + U_2} \sim \beta(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}).$$

16. a) Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. independientes e idénticamente distribuídas con función de distribución F. Se ordenan en forma creciente, obteniéndose las v.a. $U_1, ...U_n$. En particular:

$$U_1 = \min_{1 \le i \le n} X_i \qquad U_n = \max_{1 \le i \le n} X_i.$$

Obtener la función de distribución de U_k $(1 \le k \le n)$.

b) Sea

$$f(x) = e^{-(x-\theta)}\, I_{(\theta,\infty)}(x)$$

Obtener la distribución de U_1

c) Sea

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 < x \le \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

Obtener la distribución de U_n.

17. Sea $X_1, ...X_n$ v.a. independientes con distribución exponencial de parámetros $\alpha_1, ...\alpha_n$, respectivamente.

a) Mostrar que la distribución de $Y = \min_{1 \le i \le n} X_i$ es exponencial.

b) Probar que

$$P(X_k = \min_{1 \le i \le n} X_i) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}$$

Hint: X_k y $\min_{i \neq k} X_i$ son independientes. Considerar el suceso $X_k \le \min_{i \neq k} X_i$.

18. Dos dados equilibrados, uno blanco y otro rojo, se arrojan independientemente. Sean N_1 y M_1 los números de tiros hasta que aparece el primer as en el dado blanco y en el dado rojo, respectivamente.

Hallar la distribución de $R = \max(N_1, M_1)$.

19. En un concurso de salto, cada atleta salta 3 veces, siendo su puntaje la máxima altura alcanzada. Si la altura en cada salto (en metros) es una v.a. con distribución $U(2, 2.5)$ y las tres alturas se suponen independientes, hallar la distribución del puntaje.

20. Sean $Z \sim N(0,1)$, $X_1 \sim \chi^2(n)$, $X_2 \sim \chi^2(m)$, v.a. independientes.

a) Probar que

$$U = \frac{Z}{\sqrt{X_1/n}}$$

tiene distribución t de Student con n grados de libertad, es decir su función de densidad es la siguiente:

$$f_U(u) = \frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)\sqrt{\pi n}}\big(1+\frac{u^2}{n}\big)^{-(n+1)/2}$$

b) Probar que

$$V = \frac{X_1/n}{X_2/m}$$

tiene distribución F de Snedecor con n y m grados de libertad, es decir su función de densidad es la siguiente:

$$f_V(v) = \frac{\Gamma\big(\frac{n+m}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)}\, v^{\frac{n}{2}-1}\,(\frac{n}{m})^{\frac{n}{2}}\,\big(1+\frac{n}{m}v\big)^{-(n+m)/2}\; I_{(0,\infty)}(v)$$