PROBABILIDADES

Trabajo Práctico 3

1. Se arroja un dado dos veces. Calcular la probabilidad de que la suma de los puntos sea 7 dado que:

i. la suma es impar.

ii. la suma es mayor que 6.

iii. el resultado del segundo tiro es par.

iv. al menos uno de los dos resultados es impar.

v. ambos resultados son iguales.

2. Se dispone de dos urnas cuyo contenido es el siguiente:

Urna A: 5 bolillas rojas y 3 blancas.

Urna B: 1 bolilla roja y 2 blancas.

Se arroja un dado equilibrado. Si el resultado es 3 ó 6 se extrae una bolilla de la urna A que se coloca en B y luego se extrae una bolilla de B. En caso contrario, el proceso se hace a la inversa.

a) Hallar la probabilidad de que ambas bolillas sean rojas.

b) Si ambas bolillas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que sean blancas?

3. El Departamento de Recursos Humanos de un banco ha desarrollado un test de aptitudes matemáticas que sostiene provee importante información en el momento de contratar nuevos cajeros. Luego de 6 meses de trabajo, los nuevos cajeros son evaluados, resultando que el 60% de los cajeros contratados se desempeñan satisfactoriamente, mientras que el resto lo hace en forma no satisfactoria. De los cajeros que se desempeñan satisfactoriamente el 90% aprobó el test de aptitudes matemáticas mientras que de los que se desempeñan en forma no satisfactoria sólo el 20% aprobó dicho test.

a) ¿Cuál es la probabilidad que un cajero se desempeñe satisfactoriamente dado que aprobó el test de aptitudes matemáticas?

b) ¿Cuál es la probabilidad que un cajero se desempeñe satisfactoriamente dado que no aprobó el test de aptitudes matemáticas?

¿Parece el test una herramienta efectiva en el proceso de selección de nuevos cajeros? Justificar la respuesta.

4. Hay 3 cajas A, B y C con 20 piezas cada una, conteniendo 20, 15 y 10 piezas buenas respectivamente. La probabilidad de elegir la caja A es igual a la de elegir la caja B, y la de elegir la caja C es igual a la suma de esas dos probabilidades. Eligiendo al azar una caja se sacan con reposición dos piezas que resultan ser buenas. Hallar la probabilidad condicional de que la caja elegida haya sido la A.

5. Una prueba de laboratorio para diagnosticar cierta enfermedad es tal que

$$P(A/E) = P(A^c/E^c) = 0.95$$

siendo E el suceso "la persona examinada contrajo la enfermedad" y A el suceso "el resultado de la prueba indica que la persona examinada contrajo la enfermedad".

a) Supongamos que la probabilidad de que una persona que se examina padezca la enfermedad es 0.005. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que según la prueba contrajo la enfermedad, en realidad la padezca?

b) Sean ahora

$$P(A/E) = P(A^c/E^c) = p \qquad\qquad P(E) = 0.005$$

¿Para qué valor de p es $P(E/A) = 0.95$?. Interpretar la respuesta.

6. Se dispone de $n+1$ urnas numeradas $0,1,...,n$. La urna i contiene i bolillas blancas y $n-i$ negras.

a) Se elige al azar una urna y se extrae de ella una bolilla.

   i. Hallar la probabilidad de que la bolilla extraída sea blanca.

   ii. Si la bolilla extraída es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la urna i, $0 \leq i \leq n$?

b) Se elige al azar una urna y se extraen de ella k bolillas con reposición.

   i. Hallar la probabilidad de que las k bolillas extraídas sean blancas.

   ii. Si las k bolillas extraídas son blancas y se realiza una nueva extracción, ¿cuál es la probabilidad de que esta nueva bolilla también sea blanca?

7. Consideremos el siguiente experimento llamado "**esquema de Polya**". De un bolillero que contiene B bolillas blancas (B $\geq$ 1) y R rojas (R $\geq$ 1), se extraen sucesivamente y al azar n bolillas, $n \geq 2$, devolviendo cada bolilla extraída al bolillero junto con otras c del mismo color, $c \geq 1$.

a) Hallar la probabilidad de que:

   i. se obtenga una bolilla roja en la segunda extracción.

   ii. se obtenga una bolilla roja en la n–ésima extracción.

   iii. se obtengan una bolilla roja en la segunda extracción y una blanca en la tercera.

b) Hallar la probabilidad de que:

   i. se obtenga una roja en la tercera extracción dado que en la segunda se obtuvo una roja.

ii. se haya obtenido una roja en la primera extracción dado que se obtuvo una roja en la n–ésima.

c) Hallar la probabilidad de que:

i. se obtenga por lo menos una roja en las dos primeras extracciones sabiendo que exactamente una roja se ha obtenido en las 3 primeras extracciones.

ii. la primera roja salga en la segunda extracción sabiendo que al menos una roja se obtuvo en las 3 primeras extracciones.

8. Un dado se arroja tantas veces como sea necesario hasta que aparezca un as.

a) Suponiendo que el as no aparece en el primer tiro, ¿cuál es la probabilidad de que sean necesarios mas de 3 tiros?

b) Suponiendo que el número de tiros requeridos es par, ¿cuál es la probabilidad de que sea 2?

9. Para el ejercicio 7 de la práctica 2, calcular la probabilidad de

a) sacar un 5 en la primera prueba dado que se obtuvo un 1 en la segunda.

b) sacar un 5 en la primera prueba dado que se obtuvo un 1 en la tercera.

10. Se extrae al azar una bolilla de una urna que contiene 9 bolillas, de las cuáles 3 son blancas, 3 son negras y 3 son rojas. Las bolillas están numeradas 1, 2 y 3 dentro de cada color y además las siguientes bolillas son rayadas: número 1 de color blanco, número 2 de color negro y número 3 de color rojo. Sean los sucesos:

A: la bolilla es número 1.

B: la bolilla es blanca.

C: la bolilla es rayada.

a) ¿Son independientes de a pares los sucesos A, B y C?

b) ¿Son independientes los sucesos A, B y C?

11. Una compañía maneja tres fondos de inversión diferentes. Sea A_i el evento "el fondo de inversión i aumenta de valor un día dado". Las probabilidades asociadas con varios eventos relacionados con los fondos de inversión se dan a continuación:

$$P(A_1) = 0.55 \qquad P(A_2) = 0.60 \qquad P(A_3) = 0.45 \qquad P(A_1 \cup A_2) = 0.82$$

$$P(A_1 \cup A_3) = 0.7325 \qquad P(A_2 \cup A_3) = 0.78 \qquad P((A_2 \cap A_3)/A_1) = 0.20$$

a) ¿Son independientes de a pares los eventos A_1, A_2 y A_3?

b) ¿Son independientes los eventos A_1, A_2 y A_3?

c) ¿Cuál es la probabilidad que los fondos 1 y 2 aumenten su valor, dado que el fondo 3 aumentó su valor? ¿Es diferente esta probabilidad de la probabilidad no condicional que los fondos 1 y 2 aumenten su valor?

d) ¿Cuál es la probabilidad que al menos un fondo de inversión aumente su valor en un día dado?

12. Sean $S_1, ..., S_n$ sucesos independientes en un espacio de probabilidad (Ω, A, P). Hallar la probabilidad de que de los S_i, ocurra:

a) al menos uno

b) exactamente uno

c) ninguno

d) exactamente k en el caso $P(S_i) = p, \quad 1 \leq i \leq n$.

13. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que al tirar sucesivamente una moneda equilibrada, salga cara por primera vez en la n–ésima tirada, sabiendo que salió por los menos una vez entre las (m+n) primeras tiradas? (m $\geq$ 1).

14. a) La probabilidad de ganar en una tirada de un dado es p. El jugador A comienza a jugar y, si falla, le pasa el dado a B quien intenta ganar en su tiro. Continúan arrojando el dado alternativamente hasta que uno de ellos gane. ¿Cuál es la probabilidad de que gane A?. ¿Y la probabilidad de que gane B?.

b) Calcular las probabilidades requeridas en a) en el caso en que, cuando A arroja el dado gana con probabilidad p_1 y, cuando lo arroja B gana con probabilidad p_2.

15. a) Probar que el suceso A es independiente de cualquier suceso B si y sólo si P(A)=0 ó P(A)=1.

b) Probar que si A $\subset$ B y A y B son independientes, entonces P(A)=0 ó P(B)=1.

c) Probar que si:

i) A es independiente de B $\cap$ C y de B $\cup$ C

ii) B es independiente de A $\cap$ C

iii) C es independiente de A $\cap$ B

iv) P(A) P(B) P(C) $>$ 0

entonces A, B y C son independientes.

d) Probar que si $B_i = A_i$ o $B_i = A_i^c$, siendo A_i sucesos independientes, $1 \leq i \leq n$, entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(B_i)$$

con lo cual $B_1, ..., B_m$ son independientes, para todo $2 \leq m \leq n$.