Continuidad de funciones convexas

En las siguientes hojas probaremos que las funciones convexas definidas sobre un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ son continuas. Las pruebas expuestas son casi copias de las presentes en el libro de C. Niculescu y L.E. Persson, *Convex functions and their applications* [1].

Lema 1. *Si f es una función convexa definida sobre un abierto convexo $U \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces f es localmente acotada.*

Demostración. Sea $a \in U$ arbitrario. Queremos probar que existe una vecindad de a en la que f está acotada.

Como U es abierto, podemos construir un cubo K de centro a, con vértices $v_1, v_2, ..., v_{2^n}$, contenido en U. Veamos que f está acotada en K.

Sea $M = \max_{1 \leq k \leq 2^n}\{f(v_k)\}$. Como cada $x \in K$ es una combinación lineal convexa de los vértices $v_1, v_2, ..., v_{2^n}$, tenemos:

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{2^n} \lambda_k v_k\right) \leq \sum_{k=1}^{2^n} \lambda_k f(v_k) \leq \sum_{n=1}^{2^n} \lambda_n M = M, \tag{1}$$

donde la última igualdad es cierta gracias a que la suma de los coeficientes λ_k es 1.

Por otro lado, gracias a la simetría de K, para cada $x \in K$ podemos encontrar $y \in K$ tal que $a = \frac{x+y}{2}$. Así, por la convexidad de f y por (1) aplicado a y, obtenemos:

$$f(a) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \Longrightarrow$$

$$f(x) \geq 2f(a) - f(y) \geq 2f(a) - M. \tag{2}$$

Finalmente, de (1) y (2):

$$\forall x \in K : \qquad \big|f(x)\big| \leq \max\Big\{M, 2f(a) - M\Big\}.$$

$\square$

Lema 2. *Si f es una función convexa definida sobre un abierto convexo $U \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces f es localmente Lipschitz.*

Demostración. Dado $a \in U$, por el lema anterior, podemos encontrar una bola $B_{2r}(a) \subseteq U$ en donde f está acotada superiormente por una cierta constante C. Veamos que f es localmente Lipschitz en $B_r(a)$.

Sean $x, y \in B_r(a)$, $x \neq y$. Sea $z = y + \frac{r}{\|x-y\|}(y - x)$. Es fácil ver que $z \in B_{2r}(a)$. Además:

$$y = \frac{r}{r + \|x-y\|}x + \frac{\|x-y\|}{r + \|x-y\|}z,$$

[1] https://carma.newcastle.edu.au/jon/Preprints/Books/CUP/CUPold/np-convex.pdf

que es una combinación lineal convexa de x y z. Luego:

$$f(y) \leq \frac{r}{r + \|x-y\|} f(x) + \frac{\|x-y\|}{r + \|x-y\|} f(z)$$

Y así:

$$f(y) - f(x) \leq \frac{\|x-y\|}{r + \|x-y\|} (f(z) - f(x)) \leq \frac{\|x-y\|}{r} 2C = \frac{2C}{r} \|x-y\|$$
$$\implies f(y) - f(x) \leq \frac{2C}{r} \|x-y\| .$$

Por simetría entre x e y, tenemos la desigualdad conversa. Resulta:

$$\forall x, y \in B_r(a) : \qquad \big| f(y) - f(x) \big| \leq \frac{2C}{r} \|x-y\| .$$

□

Teorema 1. *Si f es una función convexa definida sobre un abierto convexo $U \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces f es continua.*

Demostración. Por el lema anterior, basta con ver que localmente Lipschitz implica continuidad.

Sean $x \in U$ y $\epsilon > 0$. Como f es localmente Lipschitz en U, tenemos, en particular, que existen $r = r(x) > 0$ y $K = K(r, x) > 0$ tales que $B_r(x) \subseteq U$, y $\forall y \in B_r(x) : \big| f(x) - f(y) \big| \leq K \|x - y\|$. Si tomamos $\delta = \text{mín} \left\{ r, \frac{\epsilon}{K} \right\}$ en la definición de continuidad, tenemos lo buscado. □

Nota 1. *La propiedad de ser localmente Lipschitz en un abierto convexo también implica diferenciabilidad en casi todo punto. Se puede encontrar la demostración en el libro referenciado.*

Nota 2. *Estos resultados valen en general para funciones convexas definidas en abiertos convexos de espacios de Banach de dimensión finita. En el caso infinito-dimensional, hay ejemplos de funciones lineales- y, por lo tanto convexas- no continuas.*