Optimización

Primer Cuatrimestre 2019

Práctica N° 3: Problemas con restricciones

Problemas con restricciones de igualdad:

Ejercicio 1 Considerar el problema de minimizar la función f definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - 16x_3^2,$$

sujeto a la restricción $h(x) = 0$ en cada uno de los siguientes casos, y hallar los puntos donde se cumple la condición de Lagrange / Kuhn-Tucker:

- $h(x) = x_1 - 1$
- $h(x) = x_1 x_2 - 1$
- $h(x) = x_1 x_2 x_3 - 1$

Ejercicio 2 Resolver el problema

$$\begin{array}{ll} \min & x^2 + y^2 + 3xy + 6x + 19y \\ \text{s.a} & 3y + x = 5. \end{array}$$

Ejercicio 3 Encontrar el punto de la curva intersección de las superficies

$$x + y = 1, x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$$

que está más cerca del origen, aplicando las condiciones de Lagrange. Comprobar resolviéndolo mediante eliminación de variables.

Ejercicio 4 Considerar el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a} & a_i^t x - b_i = 0, \ i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Demostrar que la regularidad no es necesaria para la existencia de multiplicadores de Lagrange en un minimizador local.

Ejercicio 5 Demostrar que si $f(x)$ es convexa y $h_i(x) = a_i^t x - b_i$ entonces la función

$$l(x, \lambda^*) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* h_i(x)$$

es convexa para λ^* fijo.

Ejercicio 6 Construir un ejemplo donde un punto cumpla las condiciones necesarias de primer y segundo orden pero que no sea minimizador local del problema.

Ejercicio 7 Considerar el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \min & x_1^2 + 2x_2^2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 = 2 \end{array}$$

Encontrar un punto que cumpla las condiciones de Lagrange y verifique que es el minimizador del problema. Resolver problema análogo con la función objetivo $x_1^3 + x_2^3$.

Ejercicio 8 Resolver los siguientes problemas. En todos los casos analizar si los puntos factibles cumplen la condición de regularidad.

a) $\begin{array}{cc} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a} & (x_1 - 1)^3 = x_2^2 \end{array}$

Se cumplen las condiciones KKT en la solución?

b) $\begin{array}{cc} \min & \frac{x_1^3}{3} + x_2 \\ \text{s.a} & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}$

¿Es necesario analizar las condiciones de segundo orden para encontrar la solución?

Ejercicio 9 Considerar el problema

$$\begin{array}{cc} \min & x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{s.a} & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}$$

a) Usando las condiciones de Lagrange, encontrar una solución del problema. Interpretar las condiciones de Lagrange en x^* geométricamente.

¿Cómo son las curvas de nivel de f?

b) Analizar si se verifican las condiciones de segundo orden.

c) ¿Tiene el problema una única solución?

Problemas con restricciones de desigualdad:

Ejercicio 10 Considerar el problema

$$\begin{array}{cc} \min & -x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & x_2 \geq x_1^2 \end{array}$$

Mostrar que en el óptimo se cumplen las condiciones KKT.

Ejercicio 11 Demostrar que si x^* es un minimizador local de f sujeto a $g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, p$ y $A(x^*)$ es el conjunto de restricciones activas entonces x^* es un minimizador local del siguiente problema con restricciones de igualdad:

$$\begin{array}{cc} \min & f(x) \\ \text{s.a} & g_i(x) = 0, i \in A(x^*) \end{array}$$

Ejercicio 12 Considerar las siguientes restricciones:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_2 - (x_1 - 1)^2 \leq 0.$$

Probar que $(1, 0)$ es factible pero no es regular. Definir una función objetivo para la cual $(1, 0)$ sea la solución y se verifiquen las condiciones KKT.

Ejercicio 13 Construir problemas dados por

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.a} & g_1(x) \leq 0 \\ & g_2(x) \leq 0 \end{array}$$

y que tengan un minimizador regular $\tilde{x}$ que satisfaga lo indicado en cada caso.

a) $g_1(\tilde{x}) = 0$, $g_2(\tilde{x}) = 0$ $g_1(\tilde{x}) < 0$, $g_2(\tilde{x}) = 0$

b) $g_1(\tilde{x}) < 0$, $g_2(\tilde{x}) < 0$
¿Qué tipo de solución es $\tilde{x}$?

c) $g_1(\tilde{x}) = 0$, $g_2(\tilde{x}) = 0$ y uno de los multiplicadores es cero.
¿Qué implica esto?

Ejercicio 14 Considerar el problema

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1 - \frac{9}{4})^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.a} & x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \end{array}$$

a) Escribir las condiciones KKT y verificar que se cumplen en el punto $x^* = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$.

b) Interpretar las condiciones KKT en x^* geométricamente.

c) Analizar las condiciones suficientes de segundo orden.

d) Mostrar geométricamente que x^* es el único minimizador global.

Ejercicio 15 Considerar el problema

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 x_2 \\ \text{s.a} & x_1 \leq x_2 \end{array}$$

a) Mostrar que se cumplen las condiciones KKT en el punto $x^* = (0, 0)$.

b) Analizar si se verifican las condiciones necesarias de segundo orden en

$$\{d : \nabla g_i(x^*)^T d = 0, \forall i \in A(x^*)\}.$$

c) Analizar si se verifican las condiciones suficientes de segundo orden.

d) ¿Es x^* es un minimizador local?