PRÁCTICA 0

1. Probar que

a) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$

b) $\mathrm{Tr}(A\,B) = \mathrm{Tr}(B\,A)$

c) $\mathrm{Tr}(\sum_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}(A_i)$

d) $\mathrm{Tr}(k\,A) = k\,\mathrm{Tr}(A)$, siendo k un escalar

e) $\mathrm{Tr}(S^{-1}\,A\,S) = \mathrm{Tr}(A)$

2. Sea X un vector columna. Explicar por qué

a) $X'\,A\,X = X'\,A'\,X$, aún cuando A no sea simétrica

b) $X'\,B\,X = \mathrm{Tr}(X'\,B\,X)$

c) $\mathrm{Tr}(C\,X\,X') = X'\,C\,X$.

3. Si A y B son matrices de órdenes $n \times m$ y $m \times p$ respectivamente, probar que

a) Probar que la columna j de AB es combinación lineal de las columnas de A. ¿Qué elementos de B conforman los coeficientes de dicha combinación lineal? Interprete el caso $p = 1$.

b) Definimos gen(A) como el subespacio de R^n generado por las columnas de A. ¿Cómo se relacionan gen(AB) y gen(A)? ¿Cómo se relacionan rg(AB) con rg(A)?

c) Probar que la fila i de $A \cdot B$ es combinación lineal de las filas de B. ¿Cómo se relacionan rg(AB) con rg(B)?.

d) $\mathrm{rg}(A\,B) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$.

4. Probar que

a) $\mathrm{rg}(A\,A') = \mathrm{rg}(A'\,A) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$

b) Si P y Q son matrices no singulares, $\mathrm{rg}(P\,A\,Q) = \mathrm{rg}(A)$

5. Si A es una matriz simétrica de orden n y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son sus autovalores, probar que

a) $\mathrm{Tr}(A) = \sum \lambda_i$

b) $\mathrm{Tr}(A^s) = \sum \lambda_i^s$

c) $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \sum \frac{1}{\lambda_i}$, si A es no singular.

d) $\det(A) = \prod \lambda_i$

e) $\mathrm{rg}(A)$ es el número de autovalores no nulos de A.

6. Sea A una matriz ortogonal, probar que

a) $|\det(A)| = 1$.

b) si λ es un autovalor de A, entonces $1/\lambda$ también lo es.

c) si A es simétrica, todas sus potencias son la misma matriz o la identidad.

7. Si A es idempotente y simétrica de orden n, probar que

a) los autovalores de A son iguales a 0 ó 1.

b) $\mathrm{rg}\ (A) = \mathrm{Tr}\ (A)$.

c) $(I - A)$ es simétrica e idempotente.

d) Deducir que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(I - A) = n$.

8. Si A es una matriz idempotente y simétrica,probar que

a) si $\det\ (A) \neq 0$, entonces $A = I$.

b) $A = B\,B'$ con $B'\,B = I$. (Sugerencia: usar descomposición espectral)

c) A^k tiene los mismos autovalores que A y por lo tanto tiene el mismo rango que A.

9. Probar que

a) Para A y B simétricas, $[(A\,B)']^{-1} = A^{-1}\,B^{-1}$.

b) Sea $X \in R^{n \times q}$ de rango q, probar que $P = X\,(X'\,X)^{-1}\,X'$ es simétrica e idempotente y que $PX = X$. ¿A que subespacio proyecta?

c) Hay una sola matriz que es idempotente y ortogonal.

10. La matriz $I - P = I - X\,(X'\,X)^{-}\,X'$ satisface

a) es simétrica, idempotente e invariante por $(X'\,X)^{-}$.

b) $(I - P)\,X = 0$ y $X'\,(I - P) = 0$.

11. Sea A una matriz simétrica definida positiva.

a) Probar que sus autovalores son todos positivos.

b) A es definida positiva si y sólo si existe R no singular tal que $A = R\,R'$. (Sugerencia: usar la descomposición espectral)

c) A^{-1} es definida positiva.

d) $\mathrm{rg}(C\,A\,C') = \mathrm{rg}(C)$.

e) Si A es de orden n y C es una matriz de dimensión $p \times n$, de rango p, entonces $C\,A\,C'$ es definida positiva.

f) Si X es de dimensión $n \times p$ y de rango p, entonces $X'\,X$ es definida positiva.