Práctica 1

Ejercicio 1: Para un estudio de mercado 277 personas degustan un licor y 69 de ellas desaprueban el nuevo sabor. Construya un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.95 para la verdadera proporción p de personas que aprueban el licor.

Ejercicio 2: Sea p la probabilidad de que una ambulancia responda a una llamada en 10 minutos. En base a n = 15 observaciones independientes, se desea testear

$$H_0: p = 0.7 \quad \text{vs} \quad H_1: p < 0.7.$$

Sea X el número de respuestas entre las 15 que ocurren dentro de los 10 minutos, entonces X tiene distribución Bi(15,p).

a) Considerando la región de rechazo **R** = {0,1,2,3,4,5,6,7}, calcule el nivel de significación α del test.
b) Halle la función de potencia del test, $\pi(p)$, y la probabilidad de error de tipo II, $\beta(p)$, cuando p = 0.5 y p = 0.3.
c) ¿Si se observa X = 9 y se utiliza la región de rechazo **R,** que concluiría Ud.?. ¿Qué tipo de error pudo haberse cometido llegando a esa conclusión?. Explique.

Ejercicio 3: Una compañía que vende discos de música clásica por correo está tratando de decidir entre dos nuevas grabaciones de la Novena Sinfonía de Beethoven para agregar a su catálogo. Si ambas grabaciones son igualmente atractivas para los suscriptores ambas deben ser ofrecidas, mientras que si una es claramente preferida sobre la otra, entonces será la única ofrecida. Las hipótesis a testear son :

$$H_0: p=0.5 \quad \text{vs} \quad H_1: p \neq 0.5$$

siendo p la proporción de suscriptores que prefieren la grabación A a la B. Se eligen 10 suscriptores al azar y a cada uno se le pide que escuche las dos grabaciones e indique su preferencia. Sea X el número de suscriptores que prefieren la grabación A.

a) Calcule el nivel del test que rechaza H_o si $X \leq 2$ ó $X \geq 8$. ¿Es “el mejor test” de nivel α?
b) Calcule $\beta(0.4)$, $\beta(0.6)$ y $\beta(0.8)$.
c) Suponga que se observa X=9. ¿Deberían ofrecerse ambas grabaciones? ¿Qué tipo de error pudo haberse cometido? Calcule p-valor.
d) Repetir los ítems anteriores para un nivel de 0.1.

Ejercicio 4: Un empresario de la industria alimenticia asegura que menos del 10% de sus frascos de café instantáneo contiene menos café del que garantiza la etiqueta. Para probar esta afirmación se eligen al azar 15 frascos de café y se pesa su contenido. Su afirmación es aceptada si a lo sumo dos frascos contienen menos café del garantizado.

a) ¿Qué hipótesis se deben testear?
b) ¿Cuál es el nivel de la regla de decisión planteada? ¿Le parece razonable?
c) Encuentre la probabilidad de que la afirmación del empresario sea aceptada cuando el porcentaje real de frascos que contienen menos café del garantizado en la etiqueta es 5%, 10% y 20%.
d) Grafique la función de potencia del test planteado inicialmente. Muestre que es insesgado.
e) Con el tamaño de muestra dado, ¿es posible obtener un test de nivel 0.05? Hallar el tamaño de muestra mínimo para obtener un test de nivel 0.05, manteniendo la misma región de rechazo que el test anterior.

Ejercicio 5 (*opcional*)**:** Sean X_1 y X_2 v.a. independientes, $X_i \sim \mathrm{Bi}(n,p_i)$.

a) Justifique el uso de

$$T = \frac{X_1(n - X_1) + X_2(n - X_2)}{n}$$

como estimador de la varianza de X_1 - X_2.

b) Suponiendo que n es suficientemente grande como para que valga la aproximación Normal, muestre que un intervalo de confianza de nivel asintótico 1 - α para $p_1 - p_2$ está dado por:

$$\left[\frac{X_1 - X_2}{n} - z_{\alpha/2} \frac{s}{n}, \frac{X_1 - X_2}{n} + z_{\alpha/2} \frac{s}{n} \right]$$

siendo $s = T^{1/2}$.

c) Calcule la mediana de X_1 - X_2 y las medianas de X_1 y X_2 cuando n = 1. ¿Qué observa?

d) En la situación descripta en c), si $p_1 = p_2$ entonces med(X_1 - X_2) = 0. ¿Es cierta la recíproca?

e) Describir el conjunto de pares (p_1,p_2) para los cuáles med(X_1 - X_2) = 0.

Ejercicio 6: En un juego se tiró 180 veces un par de dados y 38 veces se obtuvo suma de puntos igual a 7. Halle un intervalo de confianza de nivel asintótico 0.95 para P(X = 7) siendo X la suma de puntos. ¿Hay razones para creer que los dados no están equilibrados?

Ejercicio 7: En la siguiente tabla se presentan 20 observaciones independientes correspondientes a una v.a. X con distribución desconocida F(x):

142	134	98	119	131	103	154	122	93	137
86	119	161	144	158	165	81	117	128	103

a) Halle un intervalo de confianza de nivel 0.95 para F(100). Compararlo con el que quedaría para muestras grandes.

b) Testee la hipótesis de que la mediana es 103.

c) Encuentre un intervalo de nivel 0.90 para la mediana. Compararlo con el que quedaría para muestras grandes.

Ejercicio 8: Probar que un intervalo de confianza de nivel 1 - α para la mediana, $x_{0.5}$, basado en un método paramétrico, suponiendo que la población es Normal es:

$$\left[\overline{X} - t_{\alpha/2;n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}}, \overline{X} + t_{\alpha/2;n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}} \right]$$

Calcule este intervalo con nivel 0.90 (α = 0.10) para los datos del ejercicio anterior y compare con el intervalo no paramétrico. ¿Cuál es el mejor en términos de longitud?

Ejercicio 9: ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para tener un 90% de seguridad de que el rango muestral incluye al menos al 95% de la población?

a) Use una tabla exacta.

b) Use la aproximación.

Ejercicio 10: ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que con probabilidad 0.95, el 99% de la población sea mayor o igual que $x^{(2)}$?.

a) Use una tabla exacta.

b) Use la aproximación.

Ejercicio 11: ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que con probabilidad 1- α = 0.90, al menos 50% de la población esté entre $x^{(5)}$ y $x^{(n-4)}$ inclusive?

a) Idem para 1- α = 0.95.

b) Idem para 1- α = 0.99.