

Ejercicios de repaso

Matemática I (B)

24 de abril de 2019

Los ítems en azul pueden resultar más difíciles que los problemas con los que venimos trabajando; considérellos a modo de desafío, pero no se preocupe si no puede resolverlos.

Ejercicios

- Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z + \frac{4}{z} = 2$.
 - Para cada uno de los z hallados, calcular la forma trigonométrica de $z^4(-1-i)^{-5}$.
 - Para cada uno de los z hallados, calcular el ángulo entre z^4 y $(-1-i)^5$.
- Sea $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por $v(n)$ al estado de cierto proceso a tiempo n . Se sabe que este proceso satisface

$$v(n+1) = Mv(n).$$

- Hallar todos los estados de equilibrio del proceso.
 - Decidir si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} v(n)$ para los siguientes estados iniciales $v(0)$, y en caso afirmativo calcularlo.
 - $v(0) = (1, 1, 2)$.
 - $v(0) = (1, -3, 2)$.
- La temperatura en un punto del espacio (x, y, z) está dada por

$$T(x, y, z) = 200 e^{-4x^2 - 9y^2 - 4z^2}.$$

- (a) Halle la tasa de cambio de la temperatura en el punto $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ en la dirección hacia el punto $Q = (1, -\frac{1}{6}, 1)$.
- (b) ¿En qué dirección la temperatura decrece más rápido en P ? Halle la tasa de decrecimiento máxima en P .
- (c) Halle el plano tangente a la superficie de nivel $T(x, y, z) = 200e^{-3}$ en el punto P .

Respuestas

- (a) Los z son $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$.

(b) Las formas trigonométricas son:
 - $2^4 \sqrt{2}^{-5} (\cos(\frac{13}{12}\pi) + i \sin(\frac{13}{12}\pi))$, para $z = z_1$.
 - $2^4 \sqrt{2}^{-5} (\cos(\frac{5}{12}\pi) + i \sin(\frac{5}{12}\pi))$, para $z = z_2$.

(c) El ángulo que forman ambos números es:
 - $\frac{11}{12}\pi$, para $z = z_1$.
 - $\frac{5}{12}\pi$, para $z = z_2$.
- (a) Los estados de equilibrio son los vectores $x(1, 1, 0)$, con $x > 0$.

(b) Para $v(0) = (1, 1, 2)$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = (2, 2, 0)$, mientras que para $v(0) = (1, -3, 2)$ el límite no existe.
- (a) La tasa de cambio de P a Q es $-\frac{1}{\sqrt{3}}400e^{-3}$.

(b) La dirección de decrecimiento máxima es $\frac{1}{\sqrt{17}}(2, 3, 2)$, y la tasa correspondiente es $-400e^{-3}\sqrt{17}$.

(c) El plano tangente está dado por la ecuación $2x + 3y + 2z = 3$.