

Práctica 2

Nociones topológicas en análisis complejo

1. a) Sea $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$, probar que

$$z_n \rightarrow z \text{ si y sólo si } \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z) \text{ e } \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$$

- b) Pruebe que: $z_n \rightarrow z \Rightarrow |z_n| \rightarrow |z|$. ¿Bajo qué condiciones vale la recíproca? Puede volver a pensar este inciso luego de realizar el ejercicio 8.

2. Escribir los primeros términos y calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a) ni^n	b) $n \left(\frac{1+i}{2} \right)^n$	c) $\left(\frac{(-1)^n + i}{2} \right)^n$
d) $\cos(n\pi) + i \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$	e) $\frac{n+1}{n} + i \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$	f) $\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n}$
g) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n$	h) $\left(\frac{1+i}{2} \right)^n$	

3. Para cada $w \in \mathbb{C}$ fijo, estudiar:

- (a) la convergencia de la sucesión $z_n = w^n$. En el caso en que $|w| = 1$ y $w^k = 1$ (raíz k -ésima de la unidad), además deduzca como se relacionan las distintas subsucesiones constantes de (z_n) con las demás soluciones de $z^k = 1$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + w + w^2 + \dots + w^n)$, para $|w| < 1$.

4. Probar

- a) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow a} \overline{f(z)} = \overline{L}$
- b) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(L)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(L)$

5. Calcular

a) $\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^2 + 2(1+i)z + 4i}{z + 2i}$	b) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$
c) $\lim_{z \rightarrow -i} z \cdot \bar{z}$	d) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z}$
e) $\lim_{z \rightarrow i} f(z)$ con $f(z) = \begin{cases} z^2 + 2z & , z \neq i \\ 3 + 2i & , z = i \end{cases}$	f) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 - 3iz + 2 + i}{z^4 + iz^2 - (3 + 4i)z + 6}$

6. Probar la continuidad de las siguientes funciones en el dominio indicado:

a) $z, \bar{z}, \operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ en \mathbb{C} .

b) $\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$.

7. Hallar los puntos de discontinuidad de:

a) $f(z) = \frac{z}{z^4 + 1}$

b) $f(z) = \frac{1}{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + 1}$
($z = x + iy$)

8. Sea $\varphi : \mathbb{C}_{\neq 0} \rightarrow (-\pi, \pi]$ definida por : $\varphi(z)$ es el único número de $(-\pi, \pi]$ tal que $z = |z| e^{i\varphi(z)}$. ¿Es continua en todo su dominio? ¿Dónde lo es?

Nota: dado $z \in \mathbb{C}_{\neq 0}$, al número $\varphi(z)$ se lo llama **argumento principal de z** y se lo nota: $\varphi(z) = \operatorname{Arg}(z)$.

9. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden definir en $z = 0$ de modo tal que resulten continuas en \mathbb{C} ?

a) $\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}$

b) $\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$

c) $\frac{(\operatorname{Re}(z))^2}{|z|}$

d) $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$

e) $\frac{z \operatorname{Re}(z)}{|z|}$

10. **Exponencial:** Se define la función exponencial como: $e^z = e^x(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$.

a) Analizar su continuidad.

b) Probar que $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$ para todo $z, z' \in \mathbb{C}$.

c) Calcular: $|e^z|$, $\operatorname{Arg} e^z$, $\operatorname{Re}(e^z)$, $\operatorname{Im}(e^z)$, $\bar{e^z}$

d) Probar que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y calcular $1/e^z$.

f) Mostrar que e^z tiene período $2\pi i$.

g) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = \pm 1$.

11. **Logaritmo**

a) Dado $w \in \mathbb{C} - \{0\}$, hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = w$.

b) Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, y sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ continuas y tales que

$$e^{f(z)} = z \quad \text{y} \quad e^{g(z)} = z$$

para todo $z \in A$. Probar que existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) = f(z) + 2k\pi i$ para todo $z \in A$. Tales funciones continuas son denominadas ramas del logaritmo en el conjunto A .

c) Sea $A = \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$

i) Observar que A es abierto y conexo, y que para cada $z \in A$, $z = |z|e^{i\text{Arg}(z)}$.

ii) Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \ln |z| + i\text{Arg}(z)$. Probar que es una rama del logaritmo.

iii) Escribir todas las ramas del logaritmo en A en función de la dada en ii).

iv) ¿Siguen siendo válidos estos resultados si se reemplaza el conjunto A por $B = \mathbb{C} - \{re^{i\theta_0}/r \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ donde $0 < \theta_0 \leq 2\pi$?

d) Sean φ, ψ dos ramas del logaritmo. ¿Es cierto que $\varphi(e^z) = \psi(e^z) = z$ para todo z ?

e) Calcular: $\ln i, \ln 1, \ln(1+i), e^{\ln i}$.