

Práctica 10

Resolución de ecuaciones diferenciales

1. **Ecuación de Euler:** $a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 xy' + a_0 y = 0, a_i \in \mathbb{R}$

(a) Mostrar que el cambio de variable $x = e^t$ transforma esta ecuación en una lineal a coeficientes constantes. ¿Dónde están definidas las soluciones de la ecuación transformada?

(b) Hallar la solución general de:

- $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$
- $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 3xy' = 0$

2. **Ecuación de Legendre:**

(a) Hallar mediante el desarrollo en serie de potencias alrededor de $z = 0$, todas las soluciones de

$$(1 - z^2)w'' - 2zw' + a(a + 1)w = 0.$$

Mostrar que si $a = n \in \mathbb{N}$, la ecuación admite por solución un polinomio P_n tal que $P_n(1) = 1$.

Nota: El polinomio P_n es el n -ésimo polinomio de Legendre.

(b) Probar la fórmula de **Olinde Rodrigues**

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} ((z^2 - 1)^n).$$

3. **Ecuación de Hermite:** $w'' - 2zw' + 2aw = 0$.

(a) Hallar todas las soluciones de la ecuación de Hermite.

(b) Mostrar que si $a \in \mathbb{N}_0$, la ecuación admite un polinomio H_n como solución.

(c) Probar que $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2})$ es solución de la ecuación para $a = n$.

4. Hallar los puntos singulares de las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de ellos son regulares en el sentido de Fuchs.

(a) $z^2 w'' + (z + z^2)w' - w = 0$.

(b) $zw'' + 4w = 0$.

(c) $z^2 w'' + 3z^2 w' - 5w = 0$.

(d) $z^2 w'' + \operatorname{sen} zw' + \cos zw = 0$.

5. **Ecuación de Laguerre:** $zw'' + (1 - z)w' + aw = 0$.

(a) Verificar que $z = 0$ es un punto singular regular de la ecuación y hallar una solución de la forma: $z^r \sum_{n \geq 1} a_n z^n$.

- (b) Mostrar que si $a \in \mathbb{N}$, la ecuación admite un polinomio L_n como solución.
- (c) Verificar que $L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z})$, llamado el n -ésimo polinomio de Laguerre, es solución de la ecuación para $a = n$.

6. **Ecuación de Bessel:** $z^2 w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)w = 0$, $\nu \in \mathbb{C}$, $Re(\nu) \geq 0$.

- (a) Mostrar que la ecuación tiene solución de la forma: $z^\nu \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$.

Comprobar que tomando $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ se obtiene la solución:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

llamada **función de Bessel de primera especie de orden ν** .

- (b) Mostrar que si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la ecuación tiene solución de la forma: $z^{-\nu} \sum_{n \geq 0} a_n z^n$,

$a_0 \neq 0$. Tomando $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu + 1)}$ se obtiene la solución:

$$I_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

- (c) Deducir que si $\nu \notin \mathbb{Z}$, la solución general de la ecuación es:

$$w(z) = AI_\nu(z) + BI_{-\nu}(z) \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

- (d) Usando el método de Frobenius y eligiendo $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$, mostrar que la solución general para $\nu = 0$ es:

$$w(z) = AI_0(z) + B \left[\log(z)I_0(z) + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right].$$

Nota: Si $\nu \in \mathbb{Z}$, la ecuación es del segundo tipo de Fuchs. Usando Frobenius se calcula una solución linealmente independiente con I_ν :

$$N_\nu(z) = \log(z)I_\nu(z) + z^{-\nu}P_\nu(z) + z^\nu f(z)$$

llamada **función de Neumann o de Bessel de segunda especie de orden ν** . P_ν es un polinomio tal que $P_\nu(0) \neq 0$ y f es una función entera. Por lo tanto, la solución general en este caso es:

$$w(z) = AI_\nu(z) + BN_\nu(z) \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

7. Probar que $zI_1(z)$ es solución de la ecuación:

$$zw'' - w' + zw = 0.$$

8. Mostrar que las ecuaciones de Legendre, Bessel, Hermite y Laguerre responden a un problema de Sturm-Liouville si $a = \nu = n$ y $z \in \mathbb{R}$.
9. Utilizando series de Fourier, hallar la solución de la siguiente ecuación (ecuación del calor):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (x, t) \in (0, 2) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, 2) \\ u(0, t) = u(1, t) & t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

donde $f(x) = x^2 - 2x$ en $(0, 2)$.

10. Utilizando series de Fourier, hallar la solución del siguiente problema (ecuación de ondas):

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, 1) \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, 1) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{donde } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

11. Utilizando series de Fourier, hallar la solución del siguiente problema (ecuación de ondas con rozamiento):

$$\begin{cases} u_{tt} + 4u_t = u_{xx} & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \text{sen}(2x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

12. Utilizando series de Fourier, encontrar una solución al siguiente problema en coordenadas polares (r, θ) :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \\ u(x, y) = f(\theta) & \text{en } \partial D \end{cases}$$

Encontrar una solución integral de la ecuación (problema de Dirichlet en el disco).

Si v es una conjugada armónica de u , ¿qué expresión se obtiene de v en términos de su serie de Fourier? ¿Qué relación existe con el desarrollo en serie de Laurent de $F = u + iv$ en el disco D ?

13. Utilizando transformada de Fourier, resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{tx} - 2u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x); u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

14. Utilizar la transformada de Fourier para hallar una solución explícita de la siguiente ecuación diferencial (problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el semiplano):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : y > 0\} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $f \in L^1(\mathbb{R})$ es una función dada. Obtener una fórmula integral de la forma

$$u(x, y) = (P_y * f)(x)$$

donde P_y es un núcleo, conocido como núcleo de Poisson.

15. (a) Utilizando la transformada de Fourier, hallar una solución a la siguiente ecuación diferencial (problema de Cauchy para la ecuación del calor):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{en } \mathbb{R}_+^2 = \{(x, t) : t > 0\} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $f \in L^1(\mathbb{R})$ es una función dada. Obtener una función integral como en el ejercicio anterior. ¿Qué núcleo interviene?

- (b) Encontrar la solución explícita cuando

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (c) ¿Qué sucede si cambiamos $u_t = u_{xx}$ por $u_t = iu_{xx}$? (ecuación de Schrödinger)

16. (a) Utilizar la transformada de Fourier para resolver la siguiente ecuación diferencial (ecuación de ondas)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde u_0 y v_0 son funciones suficientemente regulares.

- (b) Probar que la energía

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (|u_x(x, t)|^2 + |v_x(x, t)|^2) dx$$

es constante en el tiempo.