Matemática 2 - Primer Cuatrimestre 2019

Práctica 7 - Matrices Simétricas, Hermitianas, Ortogonales, Unitarias y Definidas Positivas

Ejercicio 1. Encontrar una tercera columna para que la matriz $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sea ortogonal siendo

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & * \end{pmatrix}.$$

¿Cuántas soluciones hay? Interpretar geométricamente.

Ejercicio 2. Encontrar $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal con $\det(U) = -1$.

Ejercicio 3. Encontrar una tercera fila para que la matriz $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sea unitaria siendo

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Para todos los casos de los ejercicios anteriores donde la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonalizar es simétrica, determinar una matriz ortogonal U tal que $U^t A U$ es diagonal.

Ejercicio 5. Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ unitaria tal que $\overline{U^t} A U$ sea diagonal para la matriz A siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

Ejercicio 7. Determinar y clasificar todas las transformaciones ortogonales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que $f(3, 4) = (5, 0)$.

Ejercicio 8. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle(1, 0, 1)\rangle$.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotación de eje $\langle(2, -2, -1)\rangle$ y ángulo $\pi/2$. Hallar $f(4, -1, 1)$.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

a) Probar que f es una rotación.

b) Hallar una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 12. Hallar una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\sqrt{2}/2, 1, -\sqrt{2}/2) = (0, \sqrt{2}, 0)$.

Ejercicio 13. Hallar una simetría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2, -1, 2) = (0, 3, 0)$.

Ejercicio 14. Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Probar que A es definida positiva usando el criterio de Sylvester y usando eliminación. Hallar una base ortonormal de autovectores de A.

Ejercicio 15. Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función dada por

a) $\phi(x, y) = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$

b) $\phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$

c) $\phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_2 + 2x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3$

Decidir en cada caso si ϕ define un producto interno.

Ejercicio 16. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$, se define $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$. Probar que es un producto interno, y mostrar que $\langle x, y\rangle = x^tAy$ donde A es $A = W^tW$ con $W = C_{EB}$ la matriz de cambio de base de la base canónica a la base B.

Ejercicio 17. Dada la base $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}), (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\}$ de $\mathbb{R}^3$ se define el producto interno como en el ejercicio anterior. Hallar A, la matriz del producto interno en la base canónica. Factorizar a $A = Q\Lambda Q^T$ y describir el elipsoide $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^t A x \leq 1\}$ dando sus ejes principales y su longitud.

Ejercicio 18. Un elipsoide centrado en el origen es un conjunto de la forma $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x^t P^{-1} x \leq 1\}$ para P una matriz definida positiva. Mostrar que equivalentemente se puede describir como $\mathcal{E} = \{Au \mid ||u||_2 \leq 1\}$ para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular.
Sugerencia: usar una factorización $P = A^t A$.