

Matemática 2 - Primer Cuatrimestre 2019

Práctica 6 - Producto interno

En lo que sigue, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno canónico si no está especificado, y se considera la norma que define ese producto interno.

Ejercicio 1. Calcular la norma de cada uno de los siguientes vectores, y normalizarlos

a) $u = (0, 1, 2)$, $v = (-1, 1, 1)$, $w = 3u$ y $z = u + v$

b) $u = (i, 0, 0)$, $v = (1, 0, i)$

Ejercicio 2. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos

a) $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 1, -2)$

b) $A = (i + 1, i, i)$, $B = (1, i, 0)$

Ejercicio 3.

a) Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$ tal que $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$. ¿Es único?

b) Sea $u = (1, -1)$. Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v \rangle = 0$.

c) Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u \rangle = 0$.

d) Sean $u = (1, 2)$, $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w \rangle = 1$ y $\langle v, w \rangle = 3$. Hallar w .

Ejercicio 4. Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en K^n , $n \geq 2$:

a) Si $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ para algún $u \neq 0$, entonces $v = w$.

b) Si $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$, $\forall u \in K^n$, entonces $v = w$.

Ejercicio 5. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales o no

a) $v = (1, 1, 1)$, $w = (1, 0, 1)$

c) $v = (1, i, 1)$, $w = (i, 0, 1)$

b) $v = (1, -2, 4)$, $w = (-2, 1, 1)$

d) $v = (1, i, 1)$, $w = (i, 1, 0)$

Ejercicio 6. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores

a) $v = (1, 1)$, $w = (1, 0)$

b) $v = (3, 2, -1)$, $w = (0, 1, 2)$

Ejercicio 7. Para $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define $\langle x, y \rangle_A = 4x_1y_1 + 5x_2y_2$.

Encontrar una matriz inversible $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $\langle x, y \rangle_A = (Ax)^t(Ay) = \langle Ax, Ay \rangle$ y deducir que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ es un producto interno.

Ejercicio 8. Se considera en \mathbb{R}^3 el producto interno definido por $\langle x, y \rangle_A = (Ax)^t(Ay) = \langle Ax, Ay \rangle$ para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular la norma del vector $(2, 1, -1)$ con respecto a ese producto interno.

b) Hallar una base ortonormal de \mathbb{R}^3 para dicho producto interno.

Ejercicio 9. Sea la recta $S = \langle(3, 4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S . Hallar:

a) El complemento ortogonal S^\perp de S .

b) $p(3, 4)$, $p(-4, 3)$ y $p(2, 1)$.

c) El punto más cercano de la recta S a cada uno de los puntos $(3, 4)$, $(-4, 3)$ y $(2, 1)$, y la distancia de esos puntos a la recta S .

d) Una fórmula explícita para $p(x_1, x_2)$ y la matriz $[p]_{\mathcal{E}}$ de p en la base canónica \mathcal{E} .

e) Una base ortonormal \mathcal{B} tal que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10.

a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 para obtener una base ortonormal \mathcal{B}' .

b) Calcular las coordenadas de $v = (1, 1, 1)$ y de $w = (1, 0, 0)$ en \mathcal{B}' .

c) Hallar una base ortonormal de \mathbb{R}^3 que contenga una base del plano

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

y definir explícitamente la proyección ortogonal sobre ese plano.

d) Calcular el punto de S más cercano a w , y la distancia que los separa. Ídem para v .

Ejercicio 11. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(0, i, 0); (1, 0, i); (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{C}^3 para obtener una base ortonormal \mathcal{B}' .

Ejercicio 12. Para los subespacios siguientes hallar el complemento ortogonal, y definir las proyecciones ortogonales sobre esos subespacios

a) $\langle(1, 2, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

b) $\{x \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

c) $\langle(i, 1, 1), (-1, 0, i)\rangle \subseteq \mathbb{C}^3$

d) $\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\} \subseteq \mathbb{C}^4$.

Ejercicio 13. Sea $S = \langle(1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1, 0)$, y la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S .

Ejercicio 14. En $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^*B)$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales, i.e. las matrices con coeficientes todos nulos fuera de la diagonal principal.

Ejercicio 15. En $\mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$,

- a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2\}$.
- b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1 \rangle$.
- c) Hallar el polinomio constante más cercano a X y el más cercano a X^2 .

Ejercicio 16.

- a) En $\mathcal{C}([-1, 1])$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$, hallar el polinomio de grado ≤ 2 más próximo a la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$.
- b) En $\mathcal{C}([0, \pi])$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$,
 - i) aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $\{1, \cos x, \text{sen } x\}$.
 - ii) hallar el elemento de $\langle 1, \cos x, \text{sen } x \rangle$ más próximo a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 17.

- a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica. Probar que $N(A)$ es ortogonal al espacio columna $E_C(A)$.
- b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz hermitiana, es decir tal que $A^* = A$. Probar que $N(A)$ es ortogonal a $E_C(A)$.

Ejercicio 18. (*) La solución de longitud mínima de un sistema compatible

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que el sistema $Ax = b$ es compatible.

- a) Intuitivamente: hacer un dibujo en \mathbb{R}^2 representando a $N(A)$ como una recta y representar también el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$. Determinar quién debe ser la solución de longitud mínima (cómo debe ser con respecto a la recta $N(A)$).
- b) Esta parte prueba que si existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$ y $x \perp N(A)$, entonces \bar{x} es la solución de longitud mínima, i.e. $\forall x$ solución, $x \neq \bar{x}$, se tiene $\|\bar{x}\| < \|x\|$:
Usando que si $x \neq \bar{x}$, entonces existe $z \in N(A)$ no nulo tal que $x = \bar{x} + z$ (justificar), calcular $\|x\|^2 = \langle \bar{x} + z, \bar{x} + z \rangle$ y concluir (recordar que $\bar{x} \perp N(A)$).
(Observar que esto implica en particular que si existe tal \bar{x} , entonces es único.)
- c) Este parte prueba que siempre existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$ y $x \perp N(A)$.
 - i) Justificar que sin pérdida de generalidad se puede suponer $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \leq n$ y $\text{rg}(A) = m$.
 - ii) Probar que el sistema que resulta de $Ax = 0, x \perp N(A)$ es cuadrado y tiene como única solución el 0
 - iii) Concluir del ítem anterior que la matriz que describe el sistema $Ax = 0, x \perp N(A)$ es inversible, y por lo tanto $\forall b \in \mathbb{R}^m$ el sistema $Ax = b, x \perp N(A)$ tiene una única solución.
- d) Encontrar la solución de longitud mínima del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$