

Matemática 2 - Primer Cuatrimestre 2019

Práctica 2 - Espacios vectoriales

Ejercicio 1. Mostrar que los siguientes son espacios vectoriales, verificando que son subespacios de espacios vectoriales conocidos.

- a) $\{v = (v_1, \dots, v_n) \in K^n : v_n = 0\}$, los vectores de K^n con última coordenada igual a cero.
- b) $K_n[X] := \{f \in K[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\}$, los polinomios de grado a lo sumo n .
- c) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^t = -A\}$.
- d) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''(1) = f(2)\}$, donde $C^\infty(\mathbb{R})$ son las funciones continuas infinitamente derivables.
- e) $\{f \in C(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x) dx = 0\}$, donde $C(\mathbb{R})$ son las funciones continuas.

Ejercicio 2. Mostrar que $\{f \in K[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \geq 2\}$ no es un subespacio de $K[X]$.

Ejercicio 3. Dados S, T subespacios de un espacio vectorial V , probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T \text{ ó } T \subseteq S$.

Ejercicio 4. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales

- a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$
- b) \mathbb{C}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial
- c) $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = -A^t\}$
- d) $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$
- e) $\mathbb{R}_n[X]$
- f) $\{f \in \mathbb{R}_4[X] : f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$

Ejercicio 5. Sea $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

- a) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.
- b) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.
- c) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

Ejercicio 6. Sea V un K -espacio vectorial y sean $v, w \in V$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

- a) $\langle v, w \rangle = \langle v, w + 5v \rangle$.
- b) $\langle v, w \rangle = \langle v, aw + bv \rangle, \forall a, b \in K$.
- c) $\langle v, w \rangle = \langle v, aw + bv \rangle, \forall a \in K - \{0\}, b \in K$.
- d) $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$.
- e) $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \Leftrightarrow w \in \langle v_1, v_2 \rangle$.

Ejercicio 7. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K .

- a) $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ en \mathbb{C}^2 para $K = \mathbb{R}$ y para $K = \mathbb{C}$.
- b) $\{(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1\}$ en $K[X]$

- c) $\{\sin x, \cos x, x \cos x\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ son las funciones $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$.
- d) $\{e^x, x, e^{-x}\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ para $K = \mathbb{R}$
- e) $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, $v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, $w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ en $K^{\mathbb{N}}$, donde $K^{\mathbb{N}}$ son las sucesiones $\{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in K\}$.

Ejercicio 8. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos es linealmente independiente.

- a) $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\} \subset \mathbb{R}^3$
- b) $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$
- c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Ejercicio 9. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ todos distintos y no nulos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre \mathbb{R} .

(Sugerencia: Derivar $n - 1$ veces la función $\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}$.)

Ejercicio 10. Hallar una base y la dimensión de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales.

- a) $\langle (1, 4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7) \rangle$
- b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
- c) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(2) = f(-1)\}$
- d) $\{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(2) = f'(2) = 0\}$
- e) $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{tr}(A) = 0\}$
- f) $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = a_j, \forall i, j\}$

Ejercicio 11. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K -espacio vectorial V indicado.

- a) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$
- b) $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$
- c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$

Ejercicio 12. Extraer una base de los siguientes K -espacios vectoriales, de cada uno de los sistemas de generadores dados.

- a) $\langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subset \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$
- b) $\langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subset \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$
- c) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$

Ejercicio 13. Hallar la dimensión de los siguientes \mathbb{R} -espacios vectoriales, para cada $k \in \mathbb{R}$

- a) $\langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle$
- b) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$c) \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\} \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Ejercicio 14. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle$$

Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V . Determinar si la suma es directa.

- a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$
- b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$
- c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$ y $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$
- d) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\}$ y $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$
- e) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = f''(0) = 0\}$

Ejercicio 16. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$.

Ejercicio 17. En cada caso siguiente, probar que S y T son subespacios de V que satisfacen $S \oplus T = V$.

- a) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ es constante}\}$
- b) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) = f(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$
(los elementos de S se llaman *funciones pares* y los de T , *funciones impares*).
- c) $V = K^{n \times n}$, $S = \{A \in K^{n \times n} : A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n \times n} : A = -A^t\}$
(los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T , *matrices antisimétricas*).

Ejercicio 18. Para cada subespacio $S \subseteq V$ dado, hallar un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$.

- a) $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$, $V = \mathbb{R}^4$
- b) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$
- c) $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$, $V = \mathbb{R}_4[X]$

Ejercicio 19. Mostrar que si S, T son subespacios de \mathbb{R}^3 tales que $\dim S = \dim T = 2$, entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

Ejercicio 20. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

- a) S, T subespacios de \mathbb{R}^3 , $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$
- b) S, T, W subespacios de \mathbb{R}^5 , $\dim S = \dim T = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$

Ejercicio 21. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (i.e. un subespacio de dimensión $n - 1$).

- a) Probar que $\forall v \notin T, T \oplus \langle v \rangle = V$.

- b) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.
- c) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

Ejercicio 22. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base \mathcal{B} en los siguientes casos:

- a) $V = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$, $v = (1, 2, -1)$ y $v = (x_1, x_2, x_3)$
- b) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{B} = \{3, X + 1, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$, $v = 2X^2 - X^3$
- c) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Ejercicio 23. En cada uno de los siguientes casos, calcular la matriz de cambio de base $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, hallar las coordenadas de v respecto de \mathcal{B} y, utilizando $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, las coordenadas de v respecto de \mathcal{B}' .

- a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$, $v = (-1, 5, 6)$
- b) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = \{3, 1 + X, X^2\}$, $\mathcal{B}' = \{1, X + 3, X^2 + X\}$, $v = X$
- c) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\mathcal{B}' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$, $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$
- d) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\mathcal{B} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$

(la matriz E^{ij} es la matriz que tiene un 1 en el lugar ij y 0 en todos los demás lugares),

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}, \quad v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$