Lógica y Computabilidad

1er Cuatrimestre 2019

Práctica 7 – Recursividad primitiva

---

1. Sean ψ y φ funciones numéricas totales de una y dos variables respectivamente. Analizar si existen funciones a partir de las cuales se obtenga f por recursión primitiva y, en caso de que existan, darlas.

   a) $f(x,0) = \psi(x)$, $f(x,y+1) = f(x,y) + \varphi(y,x)$.

   b) $f(x,0) = \varphi(0,x)$, $f(x,y+1) = \varphi(f(x,y)+1)$.

   c) $f(x,0) = 17$, $f(x,y+1) = f(0,y)$.

   d) $f(x,0) = 17$, $f(x,y+1) = f(0,\varphi(x,y))$.

2. Probar que cada una de las siguientes funciones es primitiva recursiva.

   a) $\text{máx}(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x < y. \end{cases}$

   b) 1) $hf(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$

   2) $par(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par;} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

   c) 1) $sqrt\,(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

   2) $psq\,(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un cuadrado perfecto;} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

3. Sean ψ y φ funciones recursivas primitivas de una y dos variables, respectivamente. Mostrar que cada una de las funciones siguientes es también primitiva recursiva.

   a) La función f_1 de una variable dada por $f_1\,(0) = \psi\,(0) + 1$ y

   $$f_1\,(x) = \psi\,(\psi\,(\ldots(\psi\,(x)+1)\ldots)+1)+1,$$

   donde la cantidad de veces que aparece ψ es $x+1$. Por ejemplo, $f_1\,(1) = \psi\,(\psi\,(1)+1)+1$.

   b) La función f_2 de dos variables dada por $f_2\,(x,0) = \varphi\,(x,0)$ y

   $$f_2\,(x,y) = \varphi\,(\varphi\,(\varphi\,(\ldots\varphi\,(\varphi\,(x,y)\,,y-1)\ldots 2)\,,1)\,,0)\,,$$

   donde la cantidad de veces que aparece φ es $y+1$. *Exempli gratia*, $f_2\,(x,1) = \varphi\,(\varphi\,(x,1)\,,0)$.

4. Sea g una función primitiva recursiva de una variable. Probar que cada una de las siguientes funciones es recursiva primitiva usando sumas y productos acotados.

   a) $f(y) = \#\,\{i \in [0,y] \mid g(i) > 3\}$.

   b) $f\,(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g\,(i+1) > g\,(i) \text{ para todo } x \leq i \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   c) $f\,(w,x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \text{ y } w \text{ es el mayor entre } g\,(x)\,, g\,(x+1)\,,\ldots, g\,(y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

5. Sean g una función recursiva primitiva de $n+1$ variables y s y t funciones recursivas primitivas de una variable. Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas.

   a) $f_1\,(x_1,\ldots,x_n,y) = \text{máx}_{0\leq i\leq y}\,(g\,(x_1,\ldots,x_n,i))$.

b) $f_2(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} \text{máx}_{s(y) \leq i \leq t(y)} (g(x_1, \dots, x_n, i)) & \text{si } s(y) \leq t(y); \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

6. Probar que las funciones dadas a continuación son primitivas recursivas. Pueden usarse como funciones auxiliares, las dadas en la clase teórica o las ya calculadas anteriormente.

   a) $shr(x, n) = \lfloor \frac{x}{2^n} \rfloor$.

   b) $lg(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor log_2(x) \rfloor + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   c) $\text{dig}(x, n)$ = el n-ésimo dígito en la representación binaria de x, contando desde la derecha y comenzando con 0. Verbigracia, $\text{dig}(13, 0) = 1$, $\text{dig}(13, 1) = 0$, $\text{dig}(13, 2) = 1$, $\text{dig}(13, 3) = 1$, $\text{dig}(13, 4) = 0$.

   d) $f(x)$ es el número de unos en la representación binaria de x.

   e) I) $f(n)$ es el último dígito del desarrollo decimal de n.

      II) $f(n)$ es el primer dígito del desarrollo decimal de n.

   f) I) $G(n, m)$ es la cantidad de números primos entre n y m.

      II) $G(n, m) = f^n(m)$, donde f es recursiva primitiva.

   g) Probar que la función de Fibonacci es primitiva recursiva. Esta función está definida por

$$F(0) = 0 \tag{1}$$
$$F(1) = 1 \tag{2}$$
$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \tag{3}$$

7. * Probar que la siguiente función es primitiva recursiva.

$$H(0) = 0 \tag{4}$$
$$H(n+1) = 1 + \prod_{i=1}^{n} H(i) \tag{5}$$

Clases PRC

8. Sean $\mathcal{C}$ una clase PRC y g_1, g_2, g_3, $g_4 \in \mathcal{C}$. Mostrar que si se satisfacen

$$h_1(x, y, z) = g_1(z, y, x),$$
$$h_2(x) = g_2(x, x, x),$$
$$h_3(w, x, y, z) = h_1(g_3(w, y), z, g_4(2, g_4(y, z)))$$

   entonces h_1, h_2 y h_3 también pertenecen a $\mathcal{C}$.

9. Probar que la clase de todas las funciones totales es PRC.

10. Sean $n > 0$ y $\mathcal{C}$ la clase de las funciones totales de no más de n variables. Mostrar que $\mathcal{C}$ no es PRC.