Lógica y computabilidad

1er cuatrimestre — 2019

Práctica 5: Lógica de primer orden

Un lenguaje de *primer orden* $\mathcal{L}$ es un lenguaje (con reglas de formación vistas en clase) en el cual el alfabeto contiene a las variables Var, a los conectivos $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, la negación $\{\neg\}$, los paréntesis $\{(,)\}$ y los cuantificadores $\{\forall, \exists\}$, junto con tres conjuntos distinguidos: los de símbolos de constantes $\mathcal{C}$, los símbolos de función $\mathcal{F}$ y los símbolos de predicado $\mathcal{P}$ (siendo este último no vacío).

1. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P, dos símbolos de función f_1, f_2, donde f_1 es unario y f_2 es binario, y un símbolo de constante c. Decidir cuáles de las siguientes expresiones del lenguaje $\mathcal{L}$ son términos y cuáles son fórmulas. Las letras x, y denotan variables.
   a) $\exists f_2(x) P(f_2(x))$.
   b) $f_2(f_1(x), f_1(y))$.
   c) $\forall x \exists c P(x, c)$.
   d) $\forall c \exists x P(x, c)$
   e) $\exists x \exists y \exists x P(f_2(x, y), f_1(y))$.
   f) $\exists x P(x, y) \forall y$.

2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario P. En cada una de las siguientes fórmulas, encontrar las apariciones libres y ligadas de las variables de dichas fórmulas. Decidir en cada caso si son o no enunciados.
   a) $\forall x \exists y P(x, x)$.
   b) $(\exists x P(y, y) \rightarrow \exists y P(y, z))$.
   c) $\exists x (\exists y P(x, x) \wedge P(x, y))$.
   d) $\forall z (\forall x P(x, y) \vee P(x, z))$.

3. En cada uno de los siguientes ejemplos, intuitivamente describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados interpretadoles como sugiere cada item.

   a) $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \exists z ((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$,
   donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, P es la relación de menor estricto, $Q(x)$ significa "x es un número racional".

   b) $\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge P(y, x)))$,
   donde P es un símbolo de predicado binario, Q y R son símbolos de predicados unarios, y la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P(x, y)$ significa "x nace en el día y", $Q(x)$ significa "x es un día", y $R(x)$ significa "x es un esclavo".

   c) $\forall x \forall y (Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow P(f(x, y))$,
   donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q(x)$ significa "x es par", $P(x)$ significa "x es impar", y $f(x, y) = x + y$.

   d) En los enunciados siguentes, la interpretación es conjunto de la gente, P es un símbolo de predicado binario, tal que $P(x, y)$ significa x quiere a y.
   1) $\exists x \forall y P(x, y)$
   2) $\forall y \exists x P(x, y)$
   3) $\exists x \exists y (\forall z P(y, z) \rightarrow P(x, y))$
   4) $\exists x \forall y \neg P(x, y)$

Interpretaciones

Un lenguaje de primer orden se dice *con igualdad* si posee un símbolo de relación binaria (notado con $=$) de modo tal que en toda interpretación, éste siempre se interpreta como la relación de igualdad.

4. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad que consiste de un símbolo de función binario f y una constante c. Para cada una de las siguientes interpretaciones

   a) $U_1 = \mathbb{N}$, $f_1(x, y) = x + y$, $c_1 = 1$; y
   b) $U_2 = \mathbb{N}$, $f_2(x, y) = x \cdot y$, $c_2 = 0$,

   determinar qué propiedad describen las siguientes sentencias y analizar si son ciertas o falsas en dicha interpretación. En caso de que sean ciertas, determinar si son ciertas en cualquier interpretación.

   a) $\forall x \exists y \left(x = f(y, y) \vee x = f(f(y, y), c)\right)$
   b) $\exists y \forall x \left(x = f(y, y) \vee x = f(f(y, y), c)\right)$
   c) $\forall x \forall y \left(f(x, y) = c \rightarrow (x = c \vee y = c)\right)$,

5. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden con igualdad, que no posee ningún otro símbolo. Determinar sentencias que describan en una interpretación arbitraria las siguientes propiedades:

   a) Existen al menos dos elementos.
   b) Existen exactamente dos elementos.
   c) Existen a lo sumo dos elementos.

6. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden con igualdad, que posee además un símbolo de relación P. Determinar sentencias que describan en una interpretación arbitraria las siguientes propiedades:

   a) Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno de ellos cumple la propiedad P.
   b) Si existe un elemento que cumple la propiedad P, es único.
   c) Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único.

Definición Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden e $\mathcal{I}$ una interpretación de dicho lenguaje. Un subconjunto A del universo de I se dice *definible* (o *distinguible*) si existe una fórmula φ de $\mathcal{L}$ con una única variable libre x, de modo tal que la sentencia que queda de hacer la sustitución $\varphi(x/u)$ en el lenguaje extendido $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ (para algún elemento u del universo $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$) es verdadera en $\mathcal{I}$ si y sólo si $u \in A$. En otras palabras

$$A = \{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}} : \varphi(x/u) \text{ es verdadero}\}.$$

Un elemento u se dice definible si $\{u\}$ es definible.

7. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario f y $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +)$, $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$ interpretaciones de $\mathcal{L}$. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.

8. Probar que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos definibles de un universo, entonces la unión $\bigcup_{i_1}^{n} A_i$ y la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ son definibles.

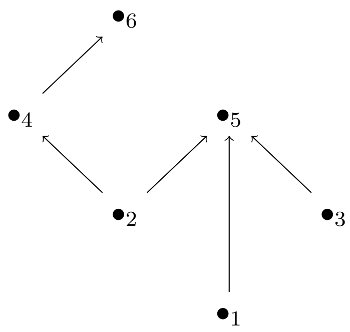
9. Probar que si el universo de una interpretación es finito con $n+1$ elementos, y tiene la propiedad que n elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.

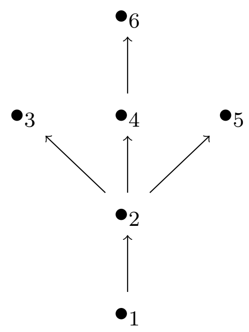
10. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y que posee símbolo de predicado binario $\leq$. Determinar sentencias que definan a $\leq$ como una relación de orden, es decir, determinar sentencias que determinen exactamente que $\leq$ es reflexivo, antisimétrico y transitivo. Decimos que $\mathcal{L}$ es un lenguaje *con orden* si posee dicho símbolo y requerimos que en toda interpretación de $\mathcal{L}$, $\leq$ sea una relación de orden. Esto es, las interpretaciones son modelos para las sentencias antes descriptas.

11. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con orden. Determinar que conjuntos son definidos por la fórmula

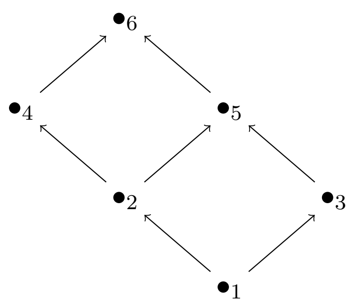
$$\alpha = \exists y \exists z \left((y \leq x) \wedge \neg (x \leq y) \wedge (z \leq x) \wedge \neg (x \leq z) \wedge \neg ((y \leq z) \vee (z \leq y)) \right)$$

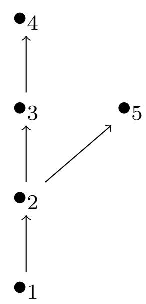
en las siguientes interpretaciones y buscar una fórmula que se verifique sólo para 6.



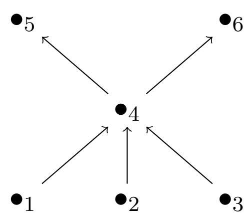


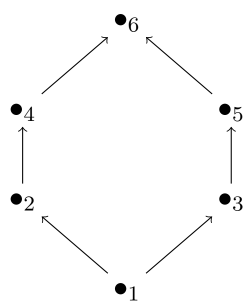
12. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con relación de orden $\leq$. Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles:





13. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con orden $\leq$. ¿Cuántos subconjuntos definibles tiene el universo de la siguientes interpretaciones?





14. Sea $\mathcal{L}_1$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de función binario y $\mathcal{L}_2$ un lenguaje de primer orden con un predicado binario. Decidir si las siguientes interpretaciones de $\mathcal{L}_1$ o $\mathcal{L}_2$ son isomorfas.

a) $(\mathbb{N},+)$ y $(\mathbb{N},\cdot)$ como interpretaciones de $\mathcal{L}_1$.
b) $(\mathbb{Z},<)$ y $(\mathbb{Z},>)$ como interpretaciones de $\mathcal{L}_2$.
c) $(\mathbb{N},<)$ y $(\mathbb{N},\leq)$ como interpretaciones de $\mathcal{L}_2$.
d) $(\mathbb{Z},<)$ y $(\mathbb{N},<)$ como interpretaciones de $\mathcal{L}_2$.
e) (Difícil) $(\mathbb{C},+)$ y $(\mathbb{R},+)$ como interpretaciones de $\mathcal{L}_1$.

Modelos

Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y un conjunto de sentencias Γ, decimos que una interpretación $\mathcal{I}$ es un *modelo* para Γ si todas las sentencias de Γ son verdaderas al interpretarlas en $\mathcal{I}$.

15. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, un símbolo de función binario f y uno de constante c. Para cada una de las siguientes sentencias hallar dos modelos, uno con universo de interpretación finito y uno infinito.
    a) $\forall x \forall y (f(x,x) = f(y,y) \to x = y)$
    b) $\forall x \exists y (x = f(y,y))$
    c) $\forall x (f(x,c) = c)$
16. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, un símbolo de función f y uno de constante c. Para cada uno de los siguientes interpretaciones, dar una sentencia de la cual sean modelos, pero no que no sea universalmente válida.
    a) $\mathcal{U}_{\mathcal{I}} = \mathbb{R}$, $f_{\mathcal{I}}(x,y) = x \cdot y$ y $c_{\mathcal{I}} = 1$.
    b) $\mathcal{U}_{\mathcal{I}} = \mathbb{C}$, $f_{\mathcal{I}}(x,y) = Re(x) + Im(y) + i$ y $c_{\mathcal{I}} = i$.
17. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario f. Para cada una de las siguientes interpretaciones, dar sentencias de la cual una interpretación sea un modelo pero no la otra y luego al revés.
    a) $(\mathbb{Z},+)$ y $(\mathbb{N},+)$.
    b) $(\mathbb{Z},\cdot)$ y $(\mathbb{Q},\cdot)$.
    c) $(\mathbb{R},\cdot)$ y $(\mathbb{C},\cdot)$.
18. Para las interpretaciones de los Ejercicios 11, 12 y 13 de un lenguaje con orden, dar un enunciado para el cual una interpretación es modelo y la otra no.
19. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, sin otros símbolos y $n \in \mathbb{N}$. Dar una sentencia φ, de modo tal que todo modelo de φ tenga al menos n elementos.
20. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, sin otros símbolos. Dar un conjunto de sentencias Γ de modo tal que todo modelo de Γ sea infinito.
21. Dadas variables proposicionales $p_1, p_2 \ldots, p_n, \ldots$, podemos interpretarlas a partir de fórmulas *sin variables libres* $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n, \ldots$, reemplazando cada instancia de p_i la fórmula α_i. A la fórmula que queda de sustituir en una fórmula proposicional φ las variables por las fórmulas sin variables libres $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la notamos φ_α.
    a) Probar que a partir de dicha sustitución, toda interpretación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$ da lugar a una valuación proposicional $v_{\mathcal{I}}$ en la cual $v_{\mathcal{I}}(p_i) = V_{\mathcal{I}}(\alpha_i)$.
    b) Sea φ una fórmula proposicional. Si φ es una tautología entonces $V_{\mathcal{I}}(\varphi_\alpha) = 1$. De la misma manera, si φ es una contradicción entonces $V_{\mathcal{I}}(\varphi_\alpha) = 0$.
22. Sean P un predicado binario, Q y R predicados unarios y φ y σ fórmulas.

a) Probar que las siguientes fórmulas no son universalmente válidas encontrando en cada caso una interpretación en la que sean falsas.
   1) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y P(y,y)$
   2) $[\exists x R(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)] \to \forall x (R(x) \leftrightarrow Q(x))$
   3) $\exists x (R(x) \to Q(x)) \to (\exists x R(x) \to \exists x Q(x))$

b) Mostrar que las siguientes fórmulas son universalmente válidas.
   1) $\forall x Qx \to \exists x Qx$
   2) $\forall x \forall y P(x,y) \to \forall y \forall x P(y,x)$
   3) $\forall x (\varphi \to \sigma) \to (\forall x \varphi \to \forall x \sigma)$
   4) $(\forall x \varphi \wedge \forall x \sigma) \leftrightarrow \forall x (\varphi \wedge \sigma)$

c) Determinar si las fórmulas siguientes son universalmente válidas.
   1) $\neg \exists y \forall x (P(x,y) \leftrightarrow \neg P(x,x))$
   2) $\exists x (Q(x) \to \forall y Q(y))$
   3) $\forall x (Qx \vee Rx) \to (\forall x Qx \vee \forall x Rx)$

23. Sea α una fórmula y x una variable cualquiera. Probar que α es universalmente válida si y sólo si $\forall x \alpha$ es universalmente válida. Concluir que dadas variables $x_1, \ldots, x_n$, la fórmula α es universalmente válida si y sólo si $\forall x_1, \ldots, \forall x_n \alpha$ es universalmente válida.

Consecuencia semántica y sintáctica.

Sean Γ un conjunto de fórmulas y α una fórmula de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ sin variables libres. Una *demostración o deducción* de α a partir de Γ es un árbol de refutación (que se adecua a las reglas vistas en clase) que parte de una conjunción de finitas fórumulas de Γ y $\neg\alpha$. Decimos que α se *deduce sintácticamente* o *es consecuencia sintáctica* de Γ (notamos $\Gamma \vdash \alpha$) si existe una deducción de α a partir de Γ. Denotamos al conjunto de deducciones de Γ por $\mathrm{Ded}(\Gamma)$. Una fórmula es una *tautología* si $\alpha \in \mathrm{Ded}(\emptyset)$. Un conjunto Γ se dice *inconsistente* si existe una fórmula α tal que $\alpha, \neg\alpha \in Ded(\Gamma)$; se dice *consistente* si no es inconsistente.

Similarmente, que α *es consecuencia semántica* de Γ (notamos $\Gamma \vDash \alpha$) si todo modelo de Γ también es modelo de α. Denotamos al conjunto de deducciones de Γ por $\mathrm{Con}(\Gamma)$.

24. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un predicado binario P. Dar una deducción de φ a partir del conjunto Γ indicado en cada caso.
   a) $\Gamma = \emptyset$, $\varphi = \forall x \forall y P(x,y) \to \forall y \forall x P(x,y)$.
   b) $\Gamma = \{\exists y \forall x P(x,y)\}$, $\varphi = \forall x \exists y P(x,y)$.
   c) $\Gamma = \{\forall x (\alpha \to \beta)\}$, $\varphi = (\forall x \alpha) \to (\forall x \beta)$; siendo α y β fórmulas cualesquiera.

25. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado binarios P y Q. Decidir si φ puede deducirse de Γ con

$$\Gamma = \{\forall x \forall y (P(x,y) \wedge P(y,x) \to Q(x,y)) \ ; \ \forall x \forall y (P(x,y) \to P(y,x))\}$$

$$\varphi = \forall x \forall y (P(x,y) \to Q(x,y)).$$

26. Para las siguientes fórmulas decidir si una se deduce de la otra o no.

$$\forall x \exists y (P(x,y) \to P(y,x))$$

$$\forall x \exists y (P(x,y) \to \exists z P(z,x))$$

27. Decimos que ψ es una *instancia de una tautología* si existe una fórmula proposicional φ que es una tautología, con variables $p_1, \dots, p_n$ y fórmulas de primer orden $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que $\psi = \varphi_\alpha$ como en el Ejercicio 1 de la Práctica 2. (Es decir, ψ se obtiene de reemplazar en φ cada variable p_i por α_i.)
   Si ψ una instancia de una tautología, probar que $\vdash \psi$.
28. A partir del ejericio anterior concluir que se tienen las reglas de deducción usuales:
    a) Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$.
    b) Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$.
    c) Si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$.
29. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un predicado binario P y predicados 1-arios Q, R, S. Decidir si las siguientes sentencias son universalmente válidas. En caso de que lo sean dar una deducción y en caso contrario exhibir una interpretación en la que sean falsas.
    a) $\forall x Q(x) \to Q(t)$, en donde t es un término sin variables.
    b) $\forall x \exists y \forall z \exists w (P(x, y) \vee P(w, z))$.
    c) $(\forall x(Q(x) \to R(x))) \wedge (\exists x(Q(x) \wedge \neg S(x))) \to (\exists x(R(x) \wedge \neg S(x)))$.
30. Probar las siguientes afirmaciones (no necesariamente dando una deducción).
    a) $\vdash \neg(\exists x\psi) \to (\forall x \neg\psi)$.
    b) $\vdash \neg(\forall x\psi) \to (\exists x \neg\psi)$.
    c) $\vdash \forall x\psi \to \forall x(\psi \vee \varphi)$.
    d) $\vdash \psi \to \exists x\psi$, si x no está libre en ψ.