Lógica y computabilidad

1er Cuatrimestre — 2019

Práctica 4: Compacidad

1. Si Γ es un conjunto de fórmulas, una fórmula φ es consecuencia de Γ si y solo si φ es consecuencia de un subconjunto finito de Γ.
2. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos satisfactibles de fórmulas, tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfactible. Probar que existe una fórmula α tal que $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$.
3. Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional que verifica la siguiente propiedad: si α y β son fórmulas de Γ, entonces $\alpha \to \beta$ es tautología o bien $\beta \to \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe una fórmula $\alpha \in \Gamma$ tal que $\{\alpha\} \models \gamma$.
4. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas. Diremos que Γ_2 es *consecuencia débil* de Γ_1 si cada vez que una valuación hace verdadera a las fórmulas de Γ_1, entonces existe una fórmula de Γ_2 tal que dicha valuación hace verdadera a la fórmula. Diremos que Γ_2 es *consecuencia fuerte* de Γ_1 si cada vez que una valuación hace verdadera a las fórmulas de Γ_1, entonces dicha valuación hace verdadera a todas las fórmulas de Γ_2.

   Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) Si Γ_2 es consecuencia débil de Γ_1, entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia fuerte S.

   b) Si Γ_2 es consecuencia fuerte de Γ_1, entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia fuerte de S.
5. Sea Γ un conjunto de fórmulas. Mostrar que si cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ, entonces existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en Γ tales que $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ es tautología.

   Definición 1. Un conjunto de fórmulas Γ se dice consistente maximal si es consistente y para toda fórmula $\alpha \notin \Gamma$ el conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.
6. El siguiente procedimiento, llamado *procedimiento de Lindenbaum* por Adolf Lindenbaum (1904-1941), permite obtener un conjunto consistente maximal a partir de un conjunto consistente Γ.

   - Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\psi_1, \psi_2, \ldots$.
   - Definimos la secuencia de conjuntos:

   $$\Gamma_0 = \Gamma$$
   $$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\psi_n\} & \text{si el conjunto es consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\psi_n\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   $$\Gamma_\infty = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$$

   Probar las siguientes afirmaciones.

   a) Cada Γ_i es consistente.

   b) Exactamente una de las fórmulas ψ y $\neg\psi$ está en Γ_∞ para cada fórmula ψ_n.

   c) Si $\Gamma_\infty \models \psi$, entonces $\psi \in \Gamma_\infty$.
   d) Γ_∞ es un conjunto consistente maximal.

7. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas. Se define

$$\Gamma_1 \to \Gamma_2 = \{\alpha \to \beta / \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}.$$

   Probar que si $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ es insatisfactible, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ fórmulas de Γ_1 y $\beta_1, \ldots, \beta_m$ fórmulas de Γ_2 tales que $(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n) \to (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m)$ es insatisfactible.

8. Establecer resultados análogos a los del ejercicio anterior para los otros conectivos.