Lógica y computabilidad

Primer cuatrimestre — 2019

Práctica 3: Consecuencia Lógica

Consecuencia semántica

Sean Γ un conjunto de fórmulas proposicionales y α una fórmula.

- Decimos que Γ es *satisfacible* si existe una valuación v tal que $v(\Gamma) = \{1\}$.
- Decimos que α es *consecuencia semántica* de Γ si $v(\alpha) = 1$ para toda valuación v tal que $v(\Gamma) = \{1\}$. Notación: $\Gamma \models \varphi$.
- Notamos $\mathrm{Con}(\Gamma)$ al conjunto de consecuencias semánticas de Γ.
- Una fórmula α es *universalmente válida* si $\alpha \in \mathrm{Con}(\emptyset)$.

1. Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfactibles, y en tal caso encontrar todas las valuaciones que satisfacen a dichos conjuntos.
   a) $\Gamma = \{((p_1 \to p_2) \to p_3), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$.
   b) $\Gamma = \{((p_2 \to p_1) \to p_1), \neg p_1, (p_1 \wedge p_3), (p_3 \to p_1)\}$.
2. Sea $\Gamma \subseteq \mathit{Form}$.
   a) Probar que si Γ es satisfactible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfactible.
   b) Mostrar (con un ejemplo) que la recíproca no es cierta.
   c) Probar que Γ es satisfactible si y sólo si $\mathrm{Con}(\Gamma)$ es satisfactible.
   d) Probar que si el conjunto de valuaciones que satisface a Γ es finito entonces Γ es infinito.
   e) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar que existe un conjunto satisfactible Γ de fórmulas proposicionales tal que existen exactamente k valuaciones que satisfacen a Γ.
3. Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional tal que $\Gamma = \mathrm{Con}(\Gamma)$. Probar que Γ es infinito.
4. Sean Γ_1 y Γ_2 conjuntos de fórmulas.
   a) Probar que $\Gamma_1 \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$.
   b) Probar que $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) = \mathrm{Con}(\Gamma)$.
   c) Probar que $\mathrm{Con}(\Gamma_1) \cup \mathrm{Con}(\Gamma_2) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.
   d) Mostrar (con un ejemplo) que no vale la igualdad en el ítem anterior.
   e) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ entonces $\mathrm{Con}(\Gamma_1) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma_2)$.
   f) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma_2)$ entonces $\mathrm{Con}(\Gamma_1) \subseteq \mathrm{Con}\Gamma_2)$.
5. Sean $\alpha, \beta \in \mathit{Form}$. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
   a) $\mathrm{Con}(\{\beta\}) \subseteq \mathrm{Con}(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \to \beta$ es universalmente válida.
   b) $\mathrm{Con}(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = \mathrm{Con}(\{\alpha\}) \cap \mathrm{Con}(\{\beta\})$.
   c) $\mathrm{Con}(\{(\alpha \vee \beta)\}) = \mathrm{Con}(\{\alpha\}) \cup \mathrm{Con}(\{\beta\})$.
   d) $\mathrm{Con}(\{(\alpha \to \beta)\}) \subseteq \mathrm{Con}(\{\beta\})$.

6. Demostrar que son equivalentes:
   a) $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in \text{Con}(\emptyset)$.
   b) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.
   c) Existe una fórmula β tal que $\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
   d) $\beta \in \text{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β.
7. Sea Γ un conjunto satisfactible de fórmulas. Decimos que Γ es *maximalmente satisfactible* si para toda fórmula $\alpha \notin \Gamma$ se tiene que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es insatisfactible.
   Mostrar un ejemplo de conjunto maximalmente satisfactible.
8. Sea Γ un conjunto satisfacible.
   a) Probar que Γ es maximalmente satisfactible si y sólo si existe una valuación $v \in \text{Val}$ tal que $\Gamma = \{\alpha \in \text{Form} : v(\alpha) = 1\}$.
   b) Probar que Γ es maximalmente satisfactible si y sólo si para toda fórmula α se tiene que $\alpha \in \Gamma$ o $\neg\alpha \in \Gamma$.
   c) Probar que existe $\Gamma' \subseteq \text{Form}$ maximalmente satisfactible tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$.
   d) Si Γ maximalmente satisfactible, probar que si $(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$, entonces $\alpha \in \Gamma$ o $\beta \in \Gamma$
   e) Si Γ es maximalmente satisfactible, probar que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\alpha \in \Gamma$.
   f) Si Γ es un conjunto maximalmente satisfactible, ¿es necesariamente $\Gamma = \text{Con}(\Gamma)$?
   g) Si $\Gamma = \text{Con}(\Gamma)$, ¿es necesariamente Γ un conjunto maximalmente satisfactible?
9. Decimos que dos conjuntos $\Gamma, \Gamma' \subset \text{Form}$ son *equivalentes* si para toda formula α se tiene que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma' \models \alpha$.
   Decimos que un conjunto Γ es *independiente* si para toda $\gamma \in \Gamma$, se tiene que $\Gamma \setminus \{\gamma\} \not\models \gamma$.
   a) Probar que todo conjunto finito de fórmulas tiene un subconjunto independiente equivalente.
   b) Probar que un conjunto infinito de fórmulas no siempre tiene un subconjunto independiente equivalente.

Consecuencia sintáctica

- Decimos que α es *consecuencia sintáctica* o bien que α *se deduce* de Γ si existen fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \Gamma$ y un árbol de refutación cerrado de $\neg\alpha \wedge \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_r$. Lo notamos $\Gamma \vdash \alpha$.
- Notamos $\text{Ded}(\Gamma)$ al conjunto de consecuencias sintácticas (o deducciones) de Γ.
- Una fórmula α es una *tautología* si $\alpha \in \text{Ded}(\emptyset)$.
- Un conjunto de fórmulas Γ se dice *inconsistente* si existe una fórmula α tal que $\alpha, \neg\alpha \in \text{Ded}(\Gamma)$.
- Un conjunto se dice consistente si no es inconsistente.

10. Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes.
    a) $\Gamma = \{((p_1 \to p_2) \to p_3), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$.
    b) $\Gamma = \{((p_2 \to p_1) \to p_1), \neg p_1, (p_1 \wedge p_3), (p_3 \to p_1)\}$.
11. Sea $\Gamma \subseteq$ *Form*.
    a) Probar que si Γ es consistente y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es consistente.

b) Mostrar (con un ejemplo) que la recíproca no es cierta.

c) Probar que Γ es consistente si y sólo si $\text{Ded}(\Gamma)$ es consistente.

12. Sean Γ_1 y Γ_2 conjuntos de fórmulas.

a) Probar que $\Gamma_1 \subseteq \text{Ded}(\Gamma)$.

b) Probar que $\text{Ded}(\text{Ded}(\Gamma)) = \text{Ded}(\Gamma)$.

c) Probar que $\text{Ded}(\Gamma_1) \cup \text{Ded}(\Gamma_2) \subseteq \text{Ded}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

d) Mostrar (con un ejemplo) que no vale la igualdad en el ítem anterior.

e) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ entonces $\text{Ded}(\Gamma_1) \subseteq \text{Ded}(\Gamma_2)$.

f) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \text{Ded}(\Gamma_2)$ entonces $\text{Ded}(\Gamma_1) \subseteq \text{Ded}\Gamma_2)$.

a) $\text{Ded}(\{\beta\}) \subseteq \text{Ded}(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \to \beta$ es una tautología.

b) $\text{Ded}(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = \text{Ded}(\{\alpha\}) \cap \text{Ded}(\{\beta\})$.

c) $\text{Ded}(\{(\alpha \vee \beta)\}) = \text{Ded}(\{\alpha\}) \cup \text{Ded}(\{\beta\})$.

d) $\text{Ded}(\{(\alpha \to \beta)\}) \subseteq \text{Ded}(\{\beta\})$.

13. Sea Γ un conjunto de fórmulas. Probar que $\text{Ded}(\Gamma) \subseteq \text{Con}(\Gamma)$. Conluir que las tautologías son universalmente válidas.

14. Decidir, mediante árboles de refutación, si $\Gamma \vdash \alpha$ en cada caso

a) $\Gamma = \emptyset$, $\alpha = (p_1 \to (p_0 \to p_1)) \to \neg(p_2 \vee \neg p_1)$.

b) $\Gamma = \emptyset$, $\alpha = (p_1 \to (p_1 \wedge p_2)) \vee ((p_3 \wedge \neg p_3) \vee (p_5 \to p_6))$.

c) $\Gamma = \{p_0, \neg p_0, p_1\}$, $\alpha = p_1 \wedge (p_1 \to p_0)$.

d) $\Gamma = \{p_1, p_1 \to \neg p_0\}$, $\alpha = (p_1 \to p_0)$.

15. Demostrar que son equivalentes:

- $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in \text{Ded}(\emptyset)$.
- $\text{Form} = \text{Ded}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.

16. Sea α una tautología con variables $p_1, \ldots, p_n$. Y sea $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ fórmulas. Notamos con $\alpha(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ la fórmula dada por reemplazar en α la variable p_i por la fórmula γ_i. Probar que $\alpha(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ es una tautología.