Lógica y computabilidad

1er Cuatrimestre — 2019

Práctica 2: Semántica proposicional

Recordemos que dos fórmulas α y β son equivalentes, y se nota $\alpha \equiv \beta$, si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$ para toda valuación v.

1. Sea $v : \mathit{Form} \to \{0,1\}$ una valuación. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, decidir si es posible calcular $v(\alpha)$ en los siguientes casos:
   - a) $\alpha = (\neg p_1)$.
   - b) $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$.
   - c) $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.
   - d) $\alpha = (\neg p_4)$.
   - e) $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$.
   - f) $\alpha = (p_1 \to p_1)$.
2. Demostrar que las siguientes pares de fórmulas son equivalentes:
   - *a)* $(p_1 \wedge p_2)$; $(\neg((\neg p_1) \vee (\neg p_2)))$.
   - *b)* $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))$; $((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3))$.
   - *c)* $(p_1 \to p_2)$; $((\neg p_2) \to (\neg p_1))$.
3. Decidir si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.
   - *a)* $(\neg(p_1 \vee p_2) \to ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \to p_3)))$.
   - *b)* $\neg((p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to ((p_1 \vee p_2) \to p_3)))$.
   - *c)* $((p_1 \vee p_2) \to (p_3 \to ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3))))$.
   - *d)* $((\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \to p_4)$.
   - *e)* $(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_1)$.
4. Dadas las siguientes tablas de verdad, construir proposiciones a las que éstas correspondan:

a)

p_1	p_2	p_3	α	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	1	0	1	
1	0	0	1	
0	1	1	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	

b)

p_1	p_2	p_3	α	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	1	0	1	
1	0	0	0	
0	1	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	0	

5. Sean $\alpha, \beta \in \mathit{Form}$.
   - *a)* Probar que si $(\alpha \wedge \beta)$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.
   - *b)* Probar que si α y β no tienen variables proposicionales en común y α y β son contingencias, entonces $(\alpha \wedge \beta)$ es contingencia.
6. Sean α y β dos fórmulas sintácticamente equivalentes (ver Práctica 1).
   - *a)* ¿Son necesariamente equivalentes?
   - *b)* ¿Si α es una tautología, β es una tautología?

   c) ¿Si α es una contradicción, β es una contradicción?
   d) ¿Si α es una contingencia, β es una contingencia?

7. Dado un conjunto de conectivos, dicho conjunto se dice que es *adecuado* si toda tabla de verdad puede ser representada por una fórmula que está construida sólo con los conectivos de este conjunto.
   a) Probar que son adecuados los conjuntos $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$.
   b) Demostrar que no son adecuados $\{\neg\}$, $\{\vee, \wedge\}$, $\{\vee, \rightarrow\}$.
   a) En los siguientes casos hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$ y $v(p_i) = 0$ si $p_i \notin \mathit{Var}(\alpha)$. ¿Cuántas valuaciones hay en cada caso?
      1) $\alpha = ((\neg p_1) \rightarrow (p_3 \vee p_4))$.
      2) $\alpha = (\neg (p_2 \rightarrow (p_3 \wedge p_1)))$.
      3) $\alpha = (((\neg p_2) \rightarrow p_3) \rightarrow (p_2 \vee (p_5 \rightarrow p_3)))$.

   b) Para estas mismas fórmulas, hallar todas las valuaciones v tales que $v(\alpha) = 1$. ¿Cuántas valuaciones hay en cada caso?

8. Construir las tablas de verdad correspondientes a las fórmulas:
   a) El o exclusivo (XOR).
   b) $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$.
   c) $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1)))$.

9. Sea $\alpha \in$ Form tal que $(\alpha \vee p_i)$ es tautología y $(\alpha \wedge p_i)$ es contradicción para toda variable proposicional p_i que figura en α. Probar que α tiene una sola variable proposicional.

10. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in$ Form y sea $\sim$ la relación binaria definida en el conjunto de valuaciones
$$v_1 \sim v_2 \text{ si y sólo si } v_1(\alpha_i) = v_2(\alpha_i) \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, k\}$$
   a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
   b) Probar que el número de elementos del conjunto cociente $\mathit{Val}/\sim$ es menor o igual que 2^k.

11. Sea $\alpha \in$ Form tal que $\vee$ es el único conectivo que figura en α. Probar que existe una fórmula γ equivalente a α y tal que $\rightarrow$ sea el único conectivo binario que figure en γ.

12. Si α y β son fórmulas, se define $\alpha|\beta$ como $((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))$, conocida como barra de Sheffer ($NAND$); y se define $\alpha \downarrow \beta$ como $((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))$, barra de Nicod ($NOR$).
   a) Construir las tablas de verdad de $\alpha|\beta$ y $\alpha \downarrow \beta$.
   b) Mostrar que $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son adecuados.

13. Consideremos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\bot\}$, el lenguaje del cálculo proposicional al que se le agrega un símbolo constante o conectivo 0-ario $\bot$, caracterizado por $v(\bot) = 0$ para toda valuación.
   a) Probar que $\{\bot, \rightarrow\}$ es adecuado.
   b) Si en lugar de agregar $\bot$, le agregamos a $\mathcal{L}$ un símbolo 0-ario $\top$, caracterizado por $v(\top) = 1$, para toda valuación v, ¿qué podría decirse de $\{\top, \rightarrow\}$?